

Пропорције

Размера бројева a и b је количник та два броја тј. $a : b$, односно $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$.

Пропорција је једнакост две размере $a : b$ и $c : d$ тј.

$$a : b = c : d$$

где су a, b, c и d реални бројеви.

Спољашњи чланови пропорције су a и d , а унутрашњи чланови пропорције су b и c .

Производ спољашњих чланова пропорције једнак је производу унутрашњих чланова пропорције тј.

$$a \cdot d = b \cdot c$$

Пример 1.

Одреди непознати члан пропорције $3 : x = 5 : 2$.

Решење:

$$3 : x = 5 : 2$$

$$3 \cdot 2 = x \cdot 5$$

$$5x = 6$$

$$x = \frac{6}{5}$$

Пример 2.

Одреди непознати члан пропорције $(x + 3) : 5 = x : 6$.

Решење:

$$(x + 3) : 5 = x : 6$$

$$(x + 3) \cdot 6 = 5 \cdot x$$

$$6x + 18 = 5x$$

$$6x - 5x = -18$$

$$x = -18$$

Пример 3.

Михајло је за 1920 динара купио осам литара моторног уља. Колико литара истог уља Никола може да купи за 2400 динара?

Решење:

За више пара може да се купи више литара уља па је пропорција директа.

динара	↑	литара	↑
1920		8	
2400		x	

$$2400:1920 = x:8$$

$$2400 \cdot 8 = 1920 \cdot x$$

$$x = \frac{2400 \cdot 8}{1920}$$

$$x = 10$$

Никола може да купи 10 литара уља.

Пример 4.

Даница је за 5 килограма кромпира платила 120 динара. Колико би платила да је купила 7 килограма тог кромпира?

Решење:

Више кромпира платила би више пара па је пропорција директа.

килограма	↑	динара	↑
5		120	
7		x	

$$7:5 = x:120$$

$$7 \cdot 120 = 5 \cdot x$$

$$x = \frac{7 \cdot 120}{5}$$

$$x = 168$$

Даница би 7 килограма кромпира платила 168 динара.

Пример 5.

Аутомобил за 8 минута пређе 15 километара. Ако се креће истом брзином, колики пут ће прећи за 3 сата и 20 минута?

Решење:

За дуже време аутомобил прелази дужи пут па је пропорција директа.

3 сата 20 минута = $3 \cdot 60 + 20 = 180 + 20 = 200$ минута

минути	↑	километри	↑
8		15	
200		x	

$$200:8 = x:15$$

$$200 \cdot 15 = 8 \cdot x$$

$$x = \frac{200 \cdot 15}{8}$$

$$x = 375$$

Аутомобил ће прећи 375 километара.

Пример 6.

За 30 секунди звук пређе пут од 10200 метара. Колики пут ће прећи звук за 1 минут и 15 секунди?

Решење:

За дуже време звук прелази дужи пут па је пропорција директа.

1 минут 15 секунди = $1 \cdot 60 + 15 = 60 + 15 = 75$ секунди

секунде	↑	метри	↑
30		10200	
75		x	

$$75:30 = x:10200$$

$$75 \cdot 10200 = 30 \cdot x$$

$$x = \frac{75 \cdot 10200}{30}$$

$$x = 25500$$

Звук ће прећи 25500 метара.

Пример 7.

Неки посао за 12 дана обаве три радника. За колико дана би исти посао обавила четири радника?

Решење:

Више радника обави за краће време исти посао па је пропорција обрнута.

дани	↑	радници	↓
12		3	
x		4	

$$x: 12 = 3: 4$$

$$x \cdot 4 = 12 \cdot 3$$

$$x = \frac{12 \cdot 3}{4}$$

$$x = 9$$

Четири радника обави посао за 9 дана.

Пример 8.

Радник радећи дневно по 7 сати заврши неки посао за 15 дана. По колико сати дневно треба да ради радник да би исти посао завршио за 12 дана?

Решење:

Да би радник посао завршио за мање дана мора да ради више сати дневно па је пропорција обрнута.

сати	↑	дани	↓
7		15	
x		12	

$$x: 7 = 15: 12$$

$$x \cdot 12 = 7 \cdot 15$$

$$x = \frac{7 \cdot 15}{12}$$

$$x = \frac{35}{4} = 8\frac{3}{4} \qquad \frac{3}{4} \cdot 60 \text{ min} = 45 \text{ min}$$

Радник треба да ради по 8 сати и 45 минута дневно.

Пример 9.

Просторија је осветљена са 15 сијалица јачина 60 вати. Колико би сијалица од 75 вати требало да буде у тој просторији исто светлости?

Решење:

Јача сијалица даје више светла тако да за исто осветљење треба мањи број сијалица па је пропорција обрнута.

$$\begin{array}{ccc} \text{сијалице} \uparrow & & \text{вати} \downarrow \\ 15 & & 60 \\ x & & 75 \end{array}$$

$$x: 15 = 60: 75$$

$$x \cdot 75 = 15 \cdot 60$$

$$x = \frac{15 \cdot 60}{75}$$

$$x = 12$$

Потребно је 12 сијалица јачине 75 вати.

Пример 10.

Зупчаник има 54 зупца и прави 84 обртаја у минути. Колико зупца има зупчаник ако прави 126 обртаја у минути и у преносу је са првим?

Решење:

Зупчаник који прави већи број обртаја у минути је мањи тј. има мањи број зупца па је пропорција обрнута.

$$\begin{array}{ccc} \text{зупци} \uparrow & & \text{обртаји} \downarrow \\ 54 & & 84 \\ x & & 126 \end{array}$$

$$x: 54 = 84: 126$$

$$x \cdot 126 = 54 \cdot 84$$

$$x = \frac{54 \cdot 84}{126}$$

$$x = 36$$

Зупчаник има 36 зупца.

Рачун поделе

Рачун поделе користи се кад неку целину треба да поделимо на два или на више делова који су датој размери.

Дељењем целине A на два дела x и y који су датој размери $a: b$ важи да је:

$$\begin{aligned} A &= x + y \\ x: y &= a: b \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= a \cdot k \\ y &= b \cdot k \end{aligned} \end{aligned}$$

где је k коефицијент пропорционалности.

Пример 11.

Број 84 поделити на два дела који су у размери 4:3.

Решење:

$$84 = x + y$$

$$x: y = 4: 3 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= 4k \\ y &= 3k \end{aligned}$$

$$84 = 4k + 3k$$

$$84 = 7k$$

$$k = 12 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= 4 \cdot 12 = 48 \\ y &= 3 \cdot 12 = 36 \end{aligned}$$

Пример 12.

Број 110 поделити на три дела који су у размери 2:3:5.

Решење:

$$110 = x + y + z$$

$$x: y: z = 2: 3: 5 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= 2k \\ y &= 3k \\ z &= 5k \end{aligned}$$

$$110 = 2k + 3k + 5k$$

$$110 = 10k$$

$$k = 11 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= 2 \cdot 11 = 22 \\ y &= 3 \cdot 11 = 33 \\ z &= 5 \cdot 11 = 55 \end{aligned}$$

Пример 13.

Број 195 поделити на делове који су обрнуто пропорционални деловима 7 и 8.

Решење:

$$195 = x + y$$

$$x:y = \frac{1}{7}:\frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= \frac{1}{7}k \\ y &= \frac{1}{8}k \end{aligned}$$

$$195 = \frac{1}{7}k + \frac{1}{8}k \quad / \cdot 56$$

$$10920 = 8k + 7k$$

$$15k = 10920$$

$$k = 728 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= \frac{1}{7} \cdot 728 = 104 \\ y &= \frac{1}{8} \cdot 728 = 91 \end{aligned}$$

Пример 14.

Број 4800 поделити обрнуто пропорционално деловима 2, 4 и 12.

Решење:

$$110 = x + y + z$$

$$x:y:z = \frac{1}{2}:\frac{1}{4}:\frac{1}{12} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= \frac{1}{2}k \\ y &= \frac{1}{4}k \\ z &= \frac{1}{12}k \end{aligned}$$

$$4800 = \frac{1}{2}k + \frac{1}{4}k + \frac{1}{12}k \quad / \cdot 12$$

$$57600 = 6k + 3k + 1k$$

$$57600 = 10k$$

$$k = 5760 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \cdot 5760 = 2880 \\ y &= \frac{1}{4} \cdot 5760 = 1440 \\ z &= \frac{1}{12} \cdot 5760 = 480 \end{aligned}$$

Процентни рачун

Процент је стоти део део неке величине тј. $1\% \cdot A = \frac{1}{100} \cdot A$.

Пример 15.

На снижењу од 15% мајица кошта 1020 динара. Колика је била цена пре снижења?

Решење:

Мајица је снижена 15% што значи да 85% цене мајице износи 1020 динара а нас занима колико је цена мајице била пре снижења тј. колико је 100% цене.

85% ↑ 1020 динара ↑
100% | x |

$$100:85 = x:1020$$

$$100 \cdot 1020 = 85 \cdot x$$

$$x = \frac{100 \cdot 1020}{85}$$

$$x = 1200$$

Пре снижења мајица је коштала 1200 динара.

Пример 16.

Мајица кошта 1500 динара. Колика ће коштати после поскупљења од 30%?

Решење:

Мајица кошта 1500 динара и то је 100% а нас занима колико ће коштати кад поскупи 30% тј. колико ће бити 130%.

1500 динара ↑ 100% ↑
 x | 130% ↑

$$x:1500 = 130:100$$

$$x \cdot 100 = 1500 \cdot 130$$

$$x = \frac{1500 \cdot 130}{100}$$

$$x = 1950$$

После поскупљења мајица ће коштати 1950 динара.

Пример 17.

Цена мајице је 1000 динара. Колико кошта та мајица после снижења од 20% и поскупљења од 20%?

Решење:

Рачунамо цену после снижења од 20% тј. рачунамо 80% од почетне цене.

$$\begin{array}{ccc} 100\% & \uparrow & 1000 \text{ динара} \\ 80\% & \uparrow & x \end{array}$$

$$80:100 = x:1000$$

$$80 \cdot 1000 = 100 \cdot x$$

$$x = \frac{80 \cdot 1000}{100}$$

$$x = 800$$

Рачунамо цену после поскупљења од 20% тј. 120% од снижене цене.

$$\begin{array}{ccc} 100\% & \uparrow & 800 \text{ динара} \\ 120\% & \uparrow & x \end{array}$$

$$120:100 = x:800$$

$$120 \cdot 800 = 100 \cdot x$$

$$x = \frac{120 \cdot 800}{100}$$

$$x = 960$$

Цена мајице после поскупљења и појевтињења је 960 динара.

Пример 18.

После повећања цене за 36% и снижења за 10% мајица кошта 1836 динара. Колика је била почетна цена мајице?

Решење:

Знамо цену после снижења од 10% па рачунамо цену пре снижења.

$$\begin{array}{ccc} 90\% & \uparrow & 1836 \text{ динара} \\ 100\% & \uparrow & x \end{array}$$

$$100:90 = x:1836$$

$$100 \cdot 1836 = 90 \cdot x$$

$$x = \frac{100 \cdot 1836}{90}$$

$$x = 2040$$

Знамо цену после поскупљења од 36% па рачунамо цену пре поскупљења.

$$\begin{array}{ccc} 136\% & \uparrow & 2040 \text{ динара} \\ 100\% & \uparrow & x \end{array}$$

$$100:136 = x:2040$$

$$100 \cdot 2040 = 136 \cdot x$$

$$x = \frac{100 \cdot 2040}{136}$$

$$x = 1500$$

Почетна цена мајице је 1500 динара.