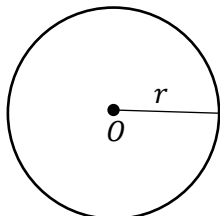


Круг и делови круга

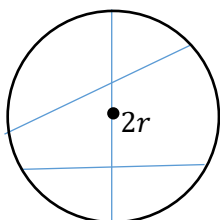
Кружница је скуп тачака у равни на једнаком растојању од једне фиксне тачке.

Фиксна тачка је центар круга, а растојање на ком се налазе тачке од центра круга је полупречник.



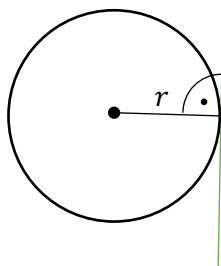
Тетива је дуж чије су крајње тачке на кружници.

Пречник је најдужа тетива.



Тангента је права која додирује кружницу.

Тангента је нормална на полупречник у тачки додира.



Круг је унија кружне линије и унутрашње области.

Површина круга:

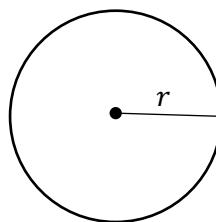
$$P = r^2\pi$$

Обим круга:

$$O = 2r\pi$$

r је полупречник круга

$$\pi \approx 3,14 \text{ или } \pi \approx \frac{22}{7}$$

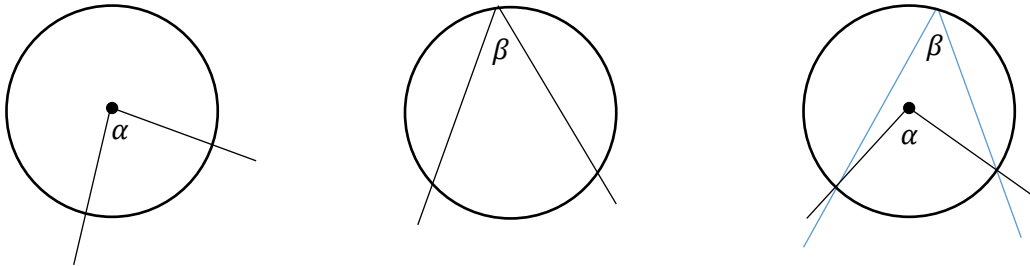


Централни угао α је угао чије је теме центар круга.

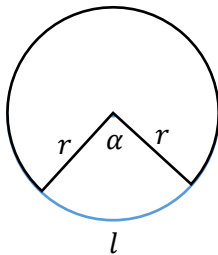
Периферијски угао β је угао чије теме је на кружности. Сви периферијски углови над истом тетивом су једнаки.

Централни угао је два пута већи од периферијског угла над истом тетивом $\alpha = 2\beta$.

Периферијски угао над пречником је прав.



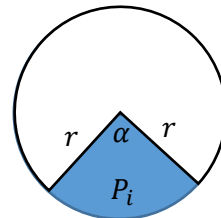
Кружни лук



Дужина кружног лука:

$$l = \frac{2r\pi \cdot \alpha}{360^\circ}$$

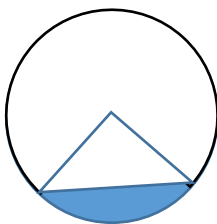
Кружни исечак



Површина кружног исечка:

$$P_i = \frac{r^2\pi \cdot \alpha}{360^\circ}$$

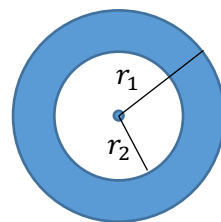
Кружни одсечак



Површина кружног одсечка:

$$P_o = P_i - P_\Delta$$

Кружни прстен



Површина кружног прстена:

$$P_p = r_1^2\pi - r_2^2\pi$$

Концентрични кругови су кругови чији се центри поклапају.

Пример 1.

Израчунај обим и површину круга полупречника 8 *cm*.

Решење:

$$r = 8 \text{ cm}$$

$$O = 2r\pi$$

$$O = 2 \cdot 8 \cdot \pi$$

$$O = 16\pi \text{ cm}$$

$$P = r^2\pi$$

$$P = 8^2\pi$$

$$P = 64\pi \text{ cm}^2$$

Пример 2.

Израчунај обим и површину круга пречника 10 *cm*. ($\pi \approx 3,14$)

Решење:

$$2r = 10 \quad \Rightarrow \quad r = 5 \text{ cm}$$

$$O = 2r\pi$$

$$O = 2 \cdot 5 \cdot 3,14$$

$$O = 31,4 \text{ cm}$$

$$P = r^2\pi$$

$$P = 25 \cdot 3,14$$

$$P = 78,5 \text{ cm}^2$$

Пример 3.

Израчунај површину круга чији је обим 28π *cm*.

Решење:

$$O = 28\pi$$

$$2r\pi = 28\pi \quad /: \pi$$

$$2r = 28$$

$$r = 14 \text{ cm}$$

$$P = r^2\pi$$

$$P = 14^2\pi$$

$$P = 196\pi \text{ cm}^2$$

Пример 4.

Израчунај обим круга чија је површина 121π *cm*.

Решење:

$$P = 121\pi$$

$$r^2\pi = 121\pi \quad /: \pi$$

$$r^2 = 121$$

$$r = \sqrt{121}$$

$$r = 11 \text{ cm}$$

$$O = 2r\pi$$

$$O = 2 \cdot 11 \cdot \pi$$

$$O = 22\pi \text{ cm}$$

Пример 5.

Дат је кружни прстен полупречника мањег круга 5 *cm* а већег круга 7 *cm*. Колика је површина прстена?

Решење:

$$r_1 = 7 \text{ cm}$$

$$r_2 = 5 \text{ cm}$$

$$P_p = r_1^2\pi - r_2^2\pi$$

$$P_p = 49\pi - 25\pi$$

$$P_p = 24\pi \text{ cm}^2$$

Пример 6.

Обими концентричних кругова су 16π и 10π . Израчунај површину кружног прстена ког образују та два круга.

Решење:

$$\begin{aligned} O_1 &= 16\pi \\ 2r_1\pi &= 16\pi \quad /:\pi \\ 2r_1 &= 16 \\ r_1 &= 8 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O_2 &= 10\pi \\ 2r_2\pi &= 10\pi \quad /:\pi \\ 2r_2 &= 10 \\ r_2 &= 5 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_p &= r_1^2\pi - r_2^2\pi \\ P_p &= 64\pi - 25\pi \\ P_p &= 39\pi \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Пример 7.

Пречник тракторског точка је 100 cm . Колико пут, у километрима, ће прећи точак ако се окрене без клизања 7000 пута? ($\pi \approx \frac{22}{7}$)

Решење:

$$\begin{aligned} 2r &= 100 \\ r &= 50 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$s = 7000 \cdot O$$

$$s = 7000 \cdot 2r\pi$$

$$s = 7000 \cdot 2 \cdot 50 \cdot \frac{22}{7}$$

$$s = 2200000 \text{ cm}$$

$$s = 22000 \text{ m}$$

$$s = 22 \text{ km}$$

Пример 8.

Тетиве AB и AC једног кругас су ортогоналне и дужина 6 cm и 8 cm . Одреди обим и површину тог круга.

Решење:

Тетиве имају заједничку тачку што значи да граде периферијски угао. Како је периферијски угао је прав то значи да је над пречником па је:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$(2r)^2 = 6^2 + 8^2$$

$$(2r)^2 = 36 + 64$$

$$(2r)^2 = 100$$

$$2r = \sqrt{100}$$

$$2r = 10$$

$$r = 5 \text{ cm}$$

$$O = 2r\pi$$

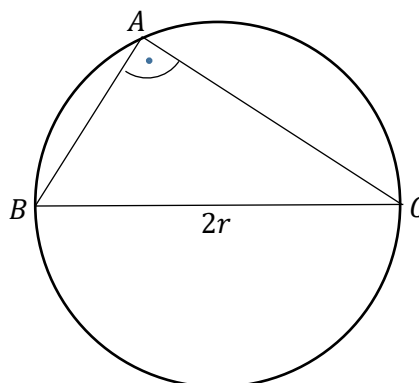
$$O = 2 \cdot 5 \cdot \pi$$

$$O = 10\pi$$

$$P = r^2\pi$$

$$P = 5^2\pi$$

$$P = 25\pi$$



Пример 9.

Дужина тетиве AB датог круга је 4 cm , а њено растојање од центра круга је 1 cm . Израчунај обим и површину круга.

Решење:

Спајањем крајева тетиве са центром круга добијамо једнакокраку троугао у коме је растојање тетиве од центра круга висина.

У једнакокраком троуглу висина полови основицу која је 4 cm па је:

$$r^2 = 1^2 + 2^2$$

$$r^2 = 1 + 4$$

$$r^2 = 5$$

$$r = \sqrt{5}\text{ cm}$$

$$O = 2r\pi$$

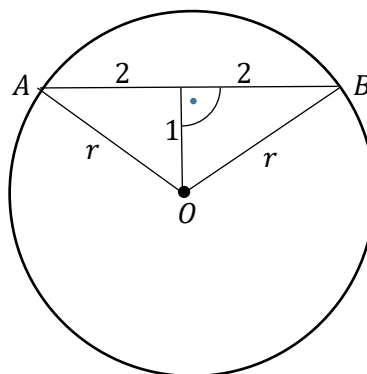
$$O = 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \pi$$

$$O = 2\sqrt{5}\pi$$

$$P = r^2\pi$$

$$P = (\sqrt{5})^2 \pi$$

$$P = 5\pi$$

**Пример 10.**

Израчунај дужину кружног лука круга полупречика 5 cm и централног угла 144° .

Решење:

$$r = 5\text{ cm}$$

$$\alpha = 144^\circ$$

$$l = \frac{2r\pi \cdot \alpha}{360^\circ}$$

$$l = \frac{2 \cdot 5 \cdot \pi \cdot 144^\circ}{360^\circ}$$

$$l = 4\pi$$

Пример 11.

Израчунај површину кружног исечка круга полупречика 2 cm и централног угла 270° .

Решење:

$$r = 2\text{ cm}$$

$$\alpha = 270^\circ$$

$$P_i = \frac{r^2\pi \cdot \alpha}{360^\circ}$$

$$P_i = \frac{2^2 \cdot \pi \cdot 270^\circ}{360^\circ}$$

$$P_i = \frac{4 \cdot \pi \cdot 270^\circ}{360^\circ}$$

$$P_i = 3\pi$$

Пример 12.

На слици је кружни лук датог полупречника и централног угла. Колика је дужина полупречника круга чији је обим једнак дужини тог лука?

Решење:

$$r = 20 \text{ cm}$$

$$\alpha = 72^\circ$$

$$l = \frac{2r\pi \cdot \alpha}{360^\circ}$$

$$l = \frac{2 \cdot 20 \cdot \pi \cdot 72^\circ}{360^\circ}$$

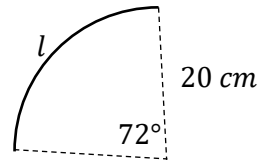
$$l = 8\pi$$

$$O = l$$

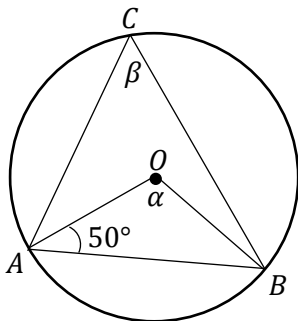
$$2r_1\pi = 8\pi \quad /: \pi$$

$$2r_1 = 8$$

$$r_1 = 4 \text{ cm}$$

**Пример 13.**

Израчунати непознате услове са слике.



Решење:

Троугао ABO је једнакокраки јер су AO и BO полупречници круга. У једнакокраком троуглу углови на основици су једнаки па је $\sphericalangle OAB = \sphericalangle ABO = 50^\circ$, одатле је:

$$50^\circ + 50^\circ + \alpha = 180^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - 50^\circ - 50^\circ$$

$$\alpha = 80^\circ$$

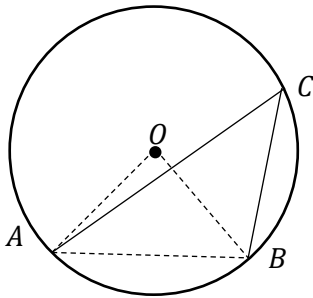
Централни угао α два пута је већи од периферијског угла β над истом тетивом тј.

$$\alpha = 2\beta \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{\alpha}{2}$$

$$\beta = 40^\circ$$

Пример 14.

Ако је дужина тетиве AB једнака полупречнику круга, израчунај меру угла ACB .



Решење:

Троугао ABO је једнакостранични па су му сви углови по 60° тј. централни угао α над тетивом AB је 60° .

Угао ACB је периферијски над тетивом AB па је једнак половини централног угла тј.

$$\beta = \frac{\alpha}{2}$$

$$\beta = 30^\circ$$