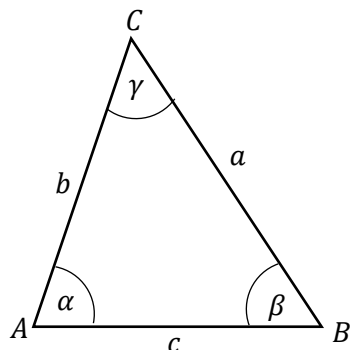


Троугао

Троугао је многоугао који има три странице.

Основни елементи троугла су:

- темена A, B и C
- странице a, b и c
- унутрашњи углови α, β и γ
спољашњи углови α_1, β_1 и γ_1



Збир унутрашњих углова у троуглу је 180° тј. $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

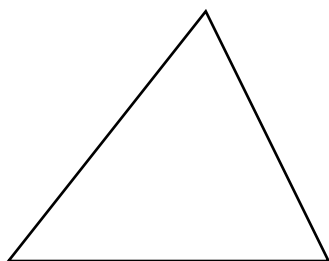
Збир спољашњих углова у троуглу је 360° тј. $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 360^\circ$.

Спољашњи и њему суседни унутрашњи угао су суплементни тј. $\alpha + \alpha_1 = 180^\circ$, $\beta + \beta_1 = 180^\circ$ и $\gamma + \gamma_1 = 180^\circ$.

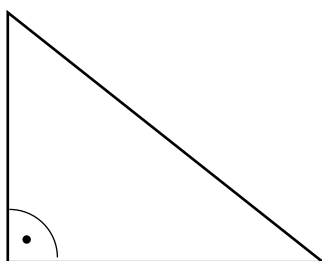
Спољашњи угао троугла једнак је збиру два унутрашња несуседна угла.

Троугао може да буде (у зависности од углова):

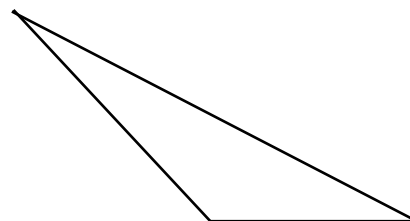
оштроугли



правоугли

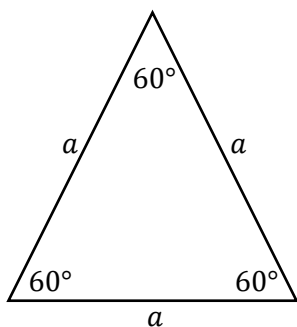


тупоугли

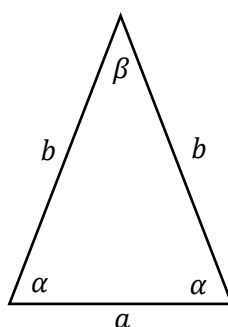


Троугао може да буде (у зависности од страница):

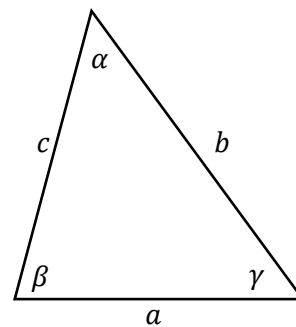
једнакостранични



једнакокраки



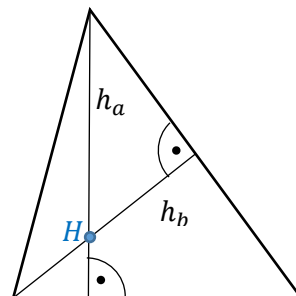
разностранни



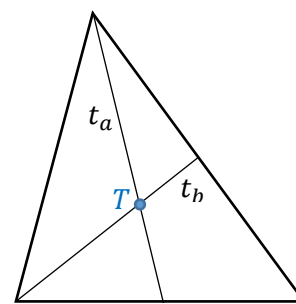
Значајне тачке троугла су:

- ортоцентар H
- тежиште T
- центар уписаног круга O
- центар описаног круга S

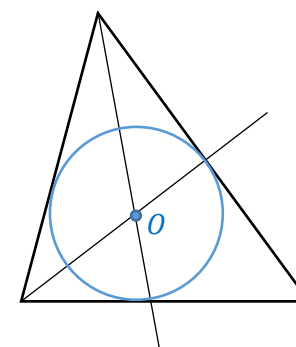
Ортоцентар је пресек висина троугла. Висина је нормала из темена на наспрамну страну. Код оштроуглог троугла налази се у троуглу, код правоуглог троугла је теме правоугла, код тупоуглог троугла је ван троугла.



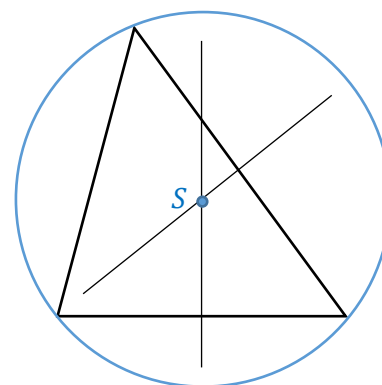
Тежиште је пресек тежишних дужи троугла. Тежишна дуж је дуж која спаја теме и средину наспрамне стране. Тежиште је увек у троуглу и дели тежишну дуж у размери 2:1.



Центар уписаног круга је у пресеку симетрала углова троугла. Симетрала угла дели угао ја два једнака дела. Центар уписаног круга је увек у троуглу.



Центар описаног круга троугла је пресек симетрала страница троугла. Симетрала странице је нормала на страницу конструисана у средини странице. Код оштроуглог троугла налази се у троуглу, код правоуглог троугла је на средини хипотенузе, код тупоуглог троугла је ван троугла.



Наспрам већег угла у троуглу налази се дужа страница.

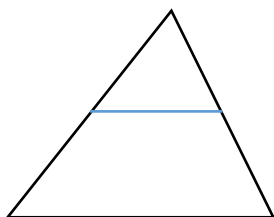
Једна страница троугла мања је од збира друге две странице, а већа од њихове разлике тј.

$$|b - c| < a < b + c$$

$$|a - c| < b < a + c$$

$$|a - b| < c < a + b$$

Средња линија троугла је дуж која спаја средине две странице, паралелна је са трећом и дупло краћа од ње.

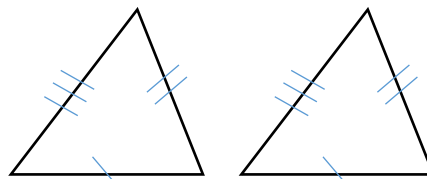


Два троугла су подударна $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$ ако имају све подударне странице и све једнаке углове.

Ставови подударности:

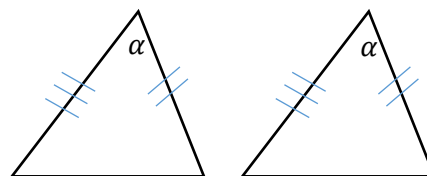
ССС

два троугла су подударна ако су им подударне све три одговарајуће странице.



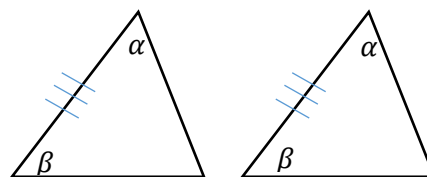
СУС

два троугла су подударна ако су им подударне две одговарајуће странице и једнак угао између тих страница.



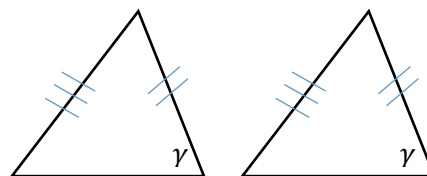
УСУ

два троугла су подударна ако им је подударна једна страница и једнаки углови који налажу на ту страницу.

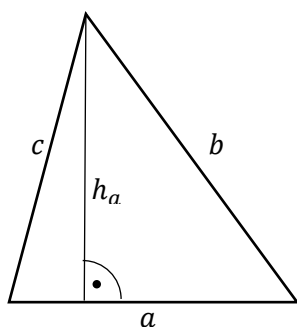


ССУ

два троугла су подударна ако су им подударне две одговарајуће странице и једнаки углови наспрам дуже странице.



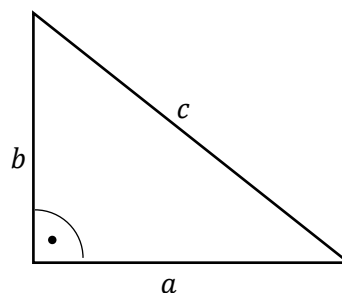
Разностранни троугао



$$O = a + b + c$$

$$P = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

Правоугли троугао



a и b су краци, c је хипотенуза

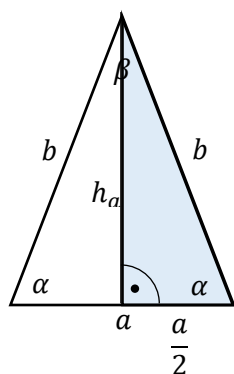
$$O = a + b + c$$

$$P = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$r_o = \frac{c}{2}$$

Једнакократи троугао



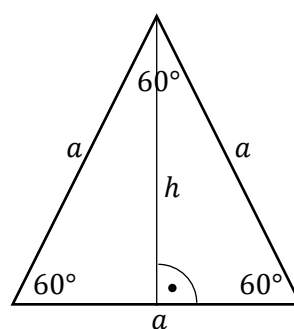
a је основица, b су краци

$$O = a + 2b$$

$$P = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2}$$

$$b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h_a^2$$

Једнакостранични троугао



$$O = 3a$$

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

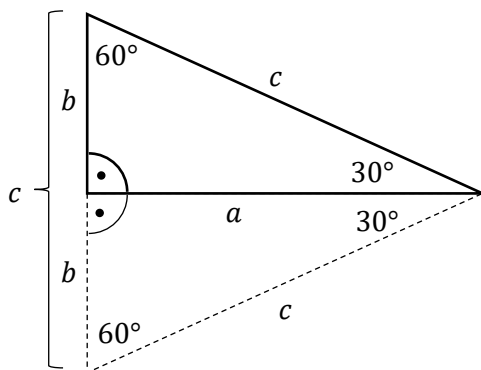
$$r_u = \frac{1}{3}h = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$r_o = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

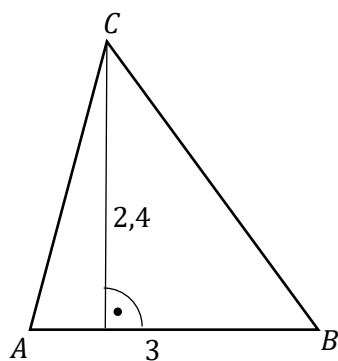
Допуна правоуглог троугла до једнакостраничног

$$c = 2b$$

$$a = \frac{c\sqrt{3}}{2}$$

*Пример 1.*

Изрaчунати површину троугла на основу података са слике.



Решење:

$$c = 3$$

$$h_c = 2,4$$

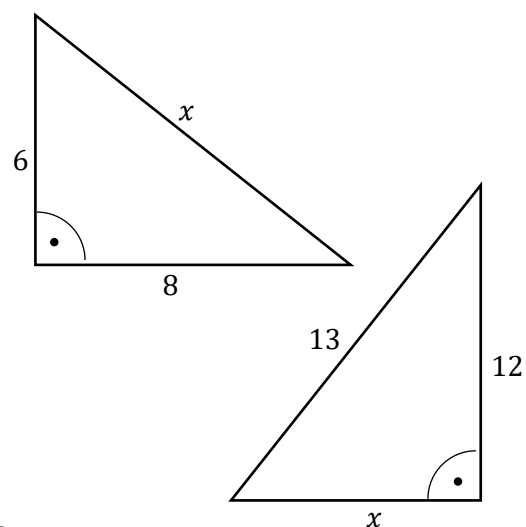
$$P = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

$$P = \frac{3 \cdot 2,4}{2}$$

$$P = 3,6$$

Пример 2.

Изрaчунати непознату страницу на основу података са слике.



Решење:

$$x^2 = 8^2 + 6^2$$

$$x^2 = 64 + 36$$

$$x^2 = 100$$

$$x = \sqrt{100}$$

$$x = 10$$

$$13^2 = x^2 + 12^2$$

$$169 = x^2 + 144$$

$$x^2 = 169 - 144$$

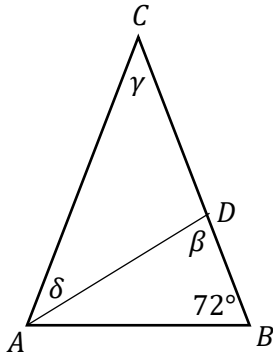
$$x^2 = 25$$

$$x = \sqrt{25}$$

$$x = 5$$

Пример 3.

Основица AB једнакокраког троугла ABC је 6 cm , а угао на основици 72° . Ако је AD симетрала угла BAC , одредити углове β , γ и δ и дужину изломљене линије $BADC$.



Решење:

Троугао ABC је једнакокраки па су му углови на основици једнаки тј.

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC = 72^\circ$$

У троуглу ABC имамо два угла од 72° па је:

$$72^\circ + 72^\circ + \gamma = 180^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - 72^\circ - 72^\circ$$

$$\gamma = 36^\circ$$

Симетрала дели угао ја два једнака дела па је:

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle DAC = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$$

$$\delta = 36^\circ$$

Троугао ABD имамо углове 36° и 72° па је:

$$36^\circ + 72^\circ + \beta = 180^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - 36^\circ - 72^\circ$$

$$\beta = 72^\circ$$

Троугао ABD је једнакокраки пошто има два угла од 72° па је $AB = AD = 6\text{ cm}$.

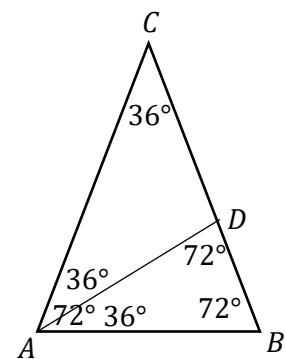
Троугао ADC је једнакокраки пошто има два угла од 36° па је $AD = DC = 6\text{ cm}$.

Изломљена линија $BADC$ је:

$$BADC = BA + AD + DC$$

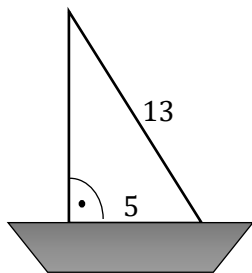
$$BADC = 6 + 6 + 6$$

$$BADC = 18\text{ cm}$$



Пример 4.

Колика је површина једра на слици?



Решење:

Једро има облик једнакокраког троугла па нам треба површина правоуглог троугла.

$$a = 5$$

$$c = 13$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$13^2 = 5^2 + b^2$$

$$169 = 25 + b^2$$

$$b^2 = 169 - 25$$

$$b^2 = 144$$

$$b = \sqrt{144}$$

$$b = 12$$

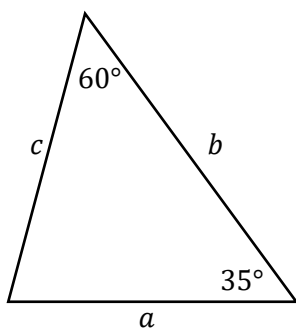
$$P = \frac{a \cdot b}{2}$$

$$P = \frac{5 \cdot 12}{2}$$

$$P = 30$$

Пример 5.

На основу података са слике поређај дужине страница троугла у растућем поретку.



Решење:

Наспрам већег угла у троуглу налази се већа страница.

$$\alpha = 60^\circ$$

$$\gamma = 35^\circ$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$60^\circ + \beta + 35^\circ = 180^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - 60^\circ - 35^\circ$$

$$\beta = 85^\circ$$

$$\gamma < \alpha < \beta$$

$$c < a < b$$

Пример 6.

Израчунај обим троугла ABC , ако је висина која одговара страници AB једнака 5 cm , унутрашњи угао код темена A је 45° и унутрашњи угао код темена B је 30° .

Решење:

$$CD = 5$$

Троугао ADC је правоугли са углом од 45° па је:

$$45^\circ + 90^\circ + \sphericalangle DCA = 180^\circ$$

$$\sphericalangle DCA = 180^\circ - 45^\circ - 90^\circ$$

$$\sphericalangle DCA = 45^\circ$$

Троугао ADC је једнакократи па је $AD = DC = 5$.

$$AC^2 = AD^2 + DC^2$$

$$AC^2 = 5^2 + 5^2$$

$$AC^2 = 25 + 25$$

$$AC^2 = 50$$

$$AC = \sqrt{50}$$

$$AC = \sqrt{25 \cdot 2}$$

$$AC = 5\sqrt{2}$$

Троугао DBC је правоугли са углом од 30° па је:

$$30^\circ + 90^\circ + \sphericalangle BCD = 180^\circ$$

$$\sphericalangle BCD = 180^\circ - 30^\circ - 90^\circ$$

$$\sphericalangle BCD = 60^\circ$$

Троугао DBC допунимо до једнакостраничног троугла па је $BC = 10$.

$$BC^2 = DC^2 + DB^2$$

$$10^2 = 5^2 + DB^2$$

$$100 = 25 + DB^2$$

$$DB^2 = 100 - 25$$

$$DB^2 = 75$$

$$DB^2 = \sqrt{75}$$

$$DB = \sqrt{25 \cdot 3}$$

$$DB = 5\sqrt{3}$$

$$AB = AD + DB$$

$$AB = 5 + 5\sqrt{3}$$

$$O = AB + BC + CA$$

$$O = 5 + 5\sqrt{3} + 10 + 5\sqrt{2}$$

$$O = 15 + 5\sqrt{3} + 5\sqrt{2}$$

