

Тачка, права, равн и угао

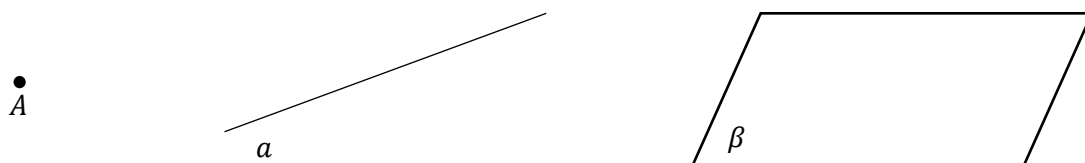
Основни геометријски појмови су: тачка, права и равн.

Тачке се обележавају великим словима латинице: $A, B, C, \dots, A_1, B_1, C_1, \dots, A', B', C', \dots$

Праве се обележавају малим словима латинице: $a, b, c, \dots, a_1, b_1, c_1, \dots, a', b', c', \dots$

Равни се обележавају словима грчког алфавета: $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots$

Геометријска интерпретација:



Полуправа има почетак и обележава се: Ap, Bq, Ca, \dots

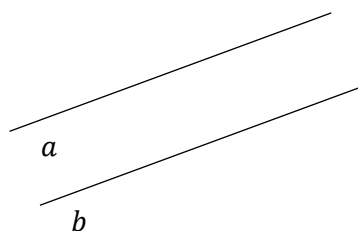
Дуж има и почетак и крај и обележава се почетном и крајњом тачком: AB, AC, \dots

Геометријска интерпретација:



Две праве су паралелне ако немају заједничких тачака или ако се поклапају.

$$a \parallel b$$

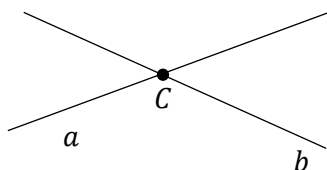


$$a \equiv b$$



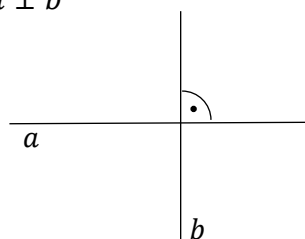
Две праве могу да се секу ако имају тачно једну заједничку тачку.

$$a \cap b = \{C\}$$

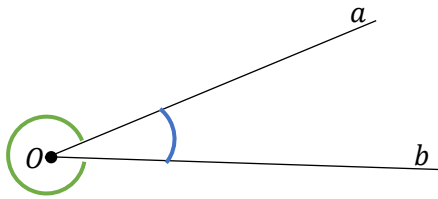


Две праве су нормалне ако се секу под правим углом.

$$a \perp b$$



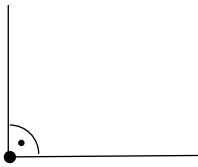
Угао $\sphericalangle aOb$ чине две полуправе са заједничким почетком и једна од области равни која је тим полуправама подељена.



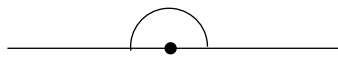
Полуправе Oa и Ob се називају краци угла, а заједнички почетак O је теме угла.

Унутрашњи угао означен је плавом бојом, а спољашњи угао зеленом бојом.

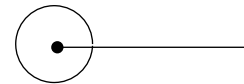
Угао чија је мера 90° је прав угао.



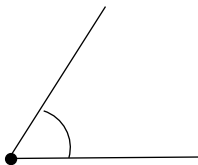
Угао чија је мера 180° је опружен угао.



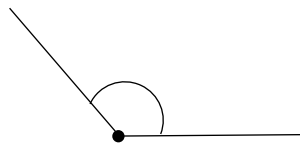
Угао чија је мера 360° је пун угао.



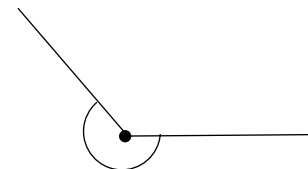
Угао чија је мера мања од 90° је оштар угао.



Угао чија је мера већа од 90° а мања од 180° је туп угао.



Угао чија је мера већа од 180° а мања од 360° је неконвексан угао.



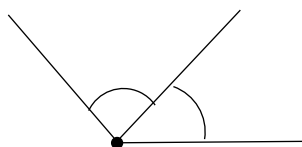
Два угла су **комплементна** ако је њихов збир 90° тј. $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Два угла су **суплементна** ако је њихов збир 180° тј. $\alpha + \beta = 180^\circ$.

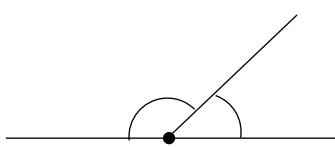
Два угла су **суседна** ако имају заједнички крак.

Два угла су **упоредна** ако су суседни и суплементни.

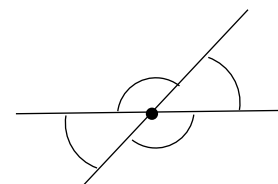
Унакрсни углови су једнаки углови који се добијају у пресеку две праве.



суседни углови



упоредни углови



унакрсни углови

$$1^\circ = 60'$$

$$1' = 60''$$

Пример 1.

Одреди комплементни и суплементни угао за углове 80° и 135° .

Решење:

За угао 80° :

комплементни је 10° јер је $80^\circ + 10^\circ = 90^\circ$

суплементни је 100° јер је $80^\circ + 100^\circ = 180^\circ$

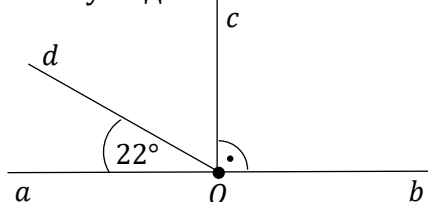
За угао 135° :

нема комплементни угао пошто је туп

суплементни је 45° јер је $135^\circ + 45^\circ = 180^\circ$

Пример 2.

Израчунај меру угла dOc и угла bOd на основу података са слике.



Решење:

$$\sphericalangle aOd + \sphericalangle dOc + \sphericalangle cOb = 180^\circ$$

$$22^\circ + \sphericalangle dOc + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\sphericalangle dOc = 180^\circ - 22^\circ - 90^\circ$$

$$\sphericalangle dOc = 68^\circ$$

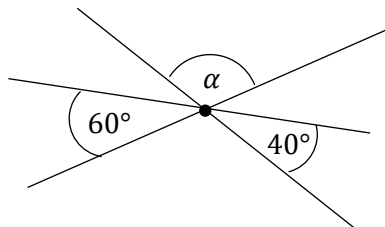
$$\sphericalangle bOd = \sphericalangle bOc + cOd$$

$$\sphericalangle bOd = 90^\circ + 68^\circ$$

$$\sphericalangle bOd = 158^\circ$$

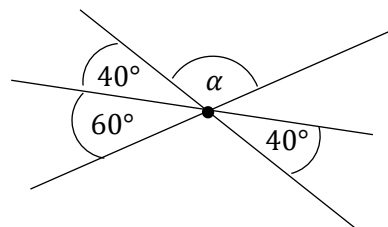
Пример 3.

Израчунај меру угла α са слике.



Решење:

Унакрсни углови су једнаки па је:



$$60^\circ + 40^\circ + \alpha = 180^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - 60^\circ - 40^\circ$$

$$\alpha = 80^\circ$$

Пример 4.

Израчунати:

- 1) $75^{\circ}12' + 12^{\circ}56'$
- 2) $100^{\circ}50'49'' + 54^{\circ}38'21''$
- 3) $90^{\circ} - 15^{\circ}22'$
- 4) $180^{\circ} - 35^{\circ}34'47''$
- 5) $132^{\circ}34'11'' - 21^{\circ}40'55''$

Решење:

$$1) 75^{\circ}12' + 12^{\circ}56' = 87^{\circ}68' = 88^{\circ}8'$$

$$\begin{array}{r} 75^{\circ}12' \\ +12^{\circ}56' \\ \hline 87^{\circ}68' \end{array}$$

$$2) 100^{\circ}50'49'' + 54^{\circ}38'21'' = 154^{\circ}88'70'' = 154^{\circ}89'10'' = 155^{\circ}29'10''$$

$$\begin{array}{r} 100^{\circ}50'49'' \\ +54^{\circ}38'21'' \\ \hline 154^{\circ}88'70'' \end{array}$$

$$3) 90^{\circ} - 15^{\circ}22' = 74^{\circ}38'$$

$$\begin{array}{r} 89^{\circ}60' \\ \cancel{90^{\circ}} \\ -15^{\circ}22' \\ \hline 74^{\circ}38' \end{array}$$

$$4) 180^{\circ} - 35^{\circ}34'47'' = 144^{\circ}25'13''$$

$$\begin{array}{r} 179^{\circ}59'60'' \\ \cancel{179^{\circ}60'} \\ \cancel{180^{\circ}} \\ - 35^{\circ}34'47'' \\ \hline 144^{\circ}25'13'' \end{array}$$

$$5) 132^{\circ}34'11'' - 21^{\circ}40'55'' = 110^{\circ}53'16''$$

$$\begin{array}{r} 131^{\circ}93'71'' \\ \cancel{132^{\circ}33'71''} \\ \cancel{132^{\circ}34'11''} \\ - 21^{\circ}40'55'' \\ \hline 110^{\circ}53'16'' \end{array}$$

Пример 5.

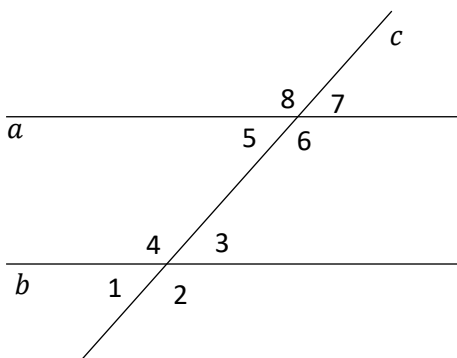
Израчунати:

- 1) $3 \cdot 26^{\circ}35'21''$
- 2) $128^{\circ} : 3$

Решење:

- 1) $3 \cdot 26^{\circ}35'21'' = (2 \cdot 26)^{\circ}(2 \cdot 35)'(2 \cdot 21)'' = 52^{\circ}70'42'' = 53^{\circ}10'42''$
- 2) $128^{\circ} : 3 = 42^{\circ}40'$

$$\begin{array}{r}
 128^{\circ} : 3 = 42^{\circ}40' \\
 \underline{-12} \\
 8 \\
 \underline{-6} \\
 2^{\circ} = 2 \cdot 60' = 120' \\
 \underline{-120} \\
 0
 \end{array}$$

Углови на трасверзалиДате су две паралелне праве a и b пресечене са трећом правом c .**Сагласни углови** су једнаки углови са исте стране трансферзале.

Парови сагласних углова су: 1 и 5, 4 и 8, 2 и 6, 3 и 7.

Наизменични углови су једнака два спољашња или два унутрашња са различитих страна трансферзале.

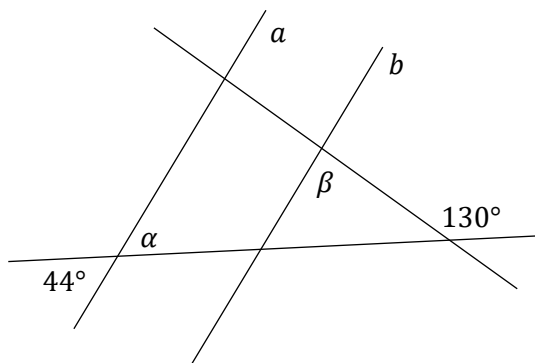
Парови наизменичних углова су: 1 и 7, 2 и 8, 4 и 6, 3 и 5.

Супротни углови су два унутрашња или два спољашња са исте стране трансферзале.

Парови супротних углова су: 1 и 8, 4 и 5, 2 и 7, 3 и 6.

Пример 6.

Ако је $a \parallel b$ израчунај углове α и β на основу података са слике.



Решење:

Сагласни углови су α и α (црвена боја).

$\alpha = 44^\circ$ унакрсни углови

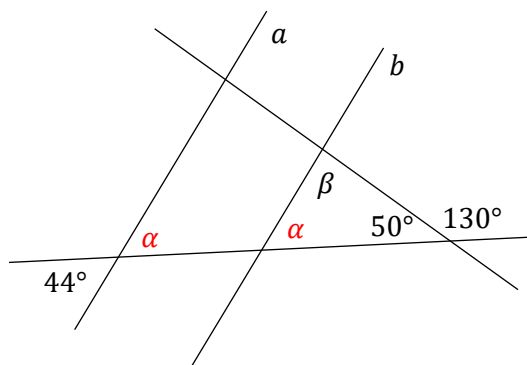
$180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$ суплементни

$\alpha + \beta + 50^\circ = 180^\circ$ углови у троуглу

$44^\circ + \beta + 50^\circ = 180^\circ$

$\beta = 180^\circ - 44^\circ - 50^\circ$

$\beta = 86^\circ$



Пример 7.

У троуглу ABC дат је унутрашњи угао $\beta = 25^\circ 15'$ и спољашњи угао $\alpha_1 = 60^\circ 15'$. Израчунај унутрашњи угао γ .

Решење:

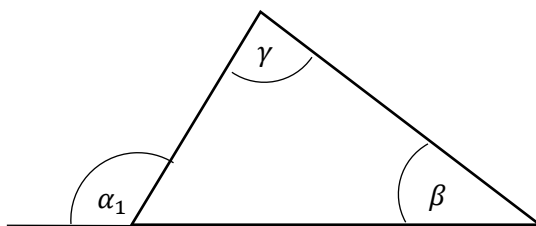
Спољашњи угао троугла једнак је збиру два унутрашња несуседна угла.

$\alpha_1 = \beta + \gamma$

$60^\circ 15' = 25^\circ 15' + \gamma$

$\gamma = 60^\circ 15' - 25^\circ 15'$

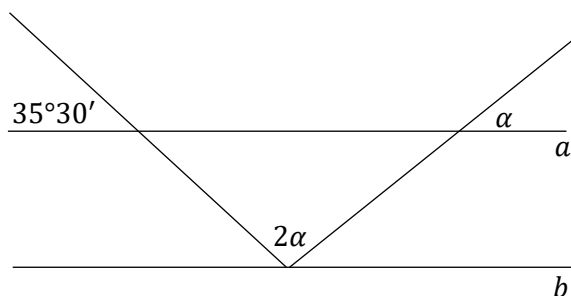
$\gamma = 35^\circ$



$$\begin{array}{r} 60^\circ 15' \\ -25^\circ 15' \\ \hline 35^\circ 00' \end{array}$$

Пример 8.

Нека су праве a и b паралелне. На основу података са слике одреди угао α .



Решење:

Унакрсни углови су једнаки и обележени су црвеном и плавом бојом.

Збир углова у троуглу је 180°

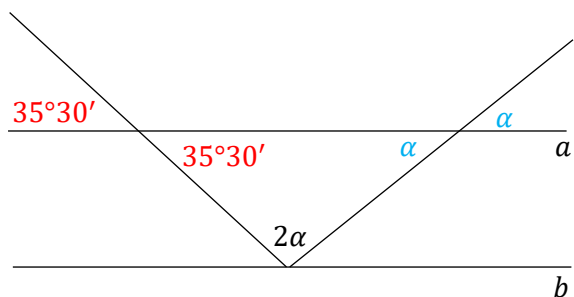
$$2\alpha + \alpha + 35^\circ 30' = 180^\circ$$

$$2\alpha + \alpha = 180^\circ - 35^\circ 30'$$

$$3\alpha = 144^\circ 30'$$

$$\alpha = 144^\circ 30' : 3$$

$$\alpha = 48^\circ 10'$$



$$\begin{array}{r} 179^\circ 60' \\ - 180^\circ \\ \hline - 35^\circ 30' \\ \hline 144^\circ 30' \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 144^\circ 30' : 3 = 48^\circ 10' \\ - 12 \\ \hline 24 \\ - 24 \\ \hline 30' \\ - 30 \\ \hline 0 \end{array}$$