

Примена једначина, неједначина и система

Пример 1.

Који број треба додати бројиоцу и одузети од имениоца разломка $\frac{11}{24}$ да би се добио разлимак $\frac{2}{3}$?

Решење:

Нека је x тражени број.

$$\frac{11 + x}{24 - x} = \frac{2}{3}$$

$$(11 + x) \cdot 3 = (24 - x) \cdot 2$$

$$33 + 3x = 48 - 2x$$

$$3x + 2x = 48 - 33$$

$$5x = 15$$

$$x = 3$$

Пример 2.

Збир половине, трећине и петине неког броја је за један већи од тог броја. Који је то број?

Решење:

Нека је x тражени број.

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x = x + 1 \quad / \cdot 30$$

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

$$\text{НЗС}(2,3,5) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

$$30 \cdot \frac{1}{2}x + 30 \cdot \frac{1}{3}x + 30 \cdot \frac{1}{5}x = 30 \cdot x + 30 \cdot 1$$

$$15x + 10x + 6x = 30x + 30$$

$$31x = 30x + 30$$

$$31x - 30x = 30$$

$$x = 30$$

Пример 3.

Марко је првог дана прочитао четвртину књиге, другог дана $\frac{2}{3}$ остатка а трећег дана преосталих 40 страна. Колико страна има књига?

Решење:

Нека је x број страна књиге.

Првог дана је прочитао $\frac{1}{4}x$. Остало је $\frac{3}{4}x$. Другог дана $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}x$. Трећег дана 40 страна.

$$\frac{1}{4}x + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}x + 40 = x$$

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}x + 40 = x \quad / \cdot 4$$

$$x + 2x + 160 = 4x$$

$$x + 2x - 4x = -160$$

$$-x = -160$$

$$x = 160$$

Пример 4.

Кроз једну цев базен се може напунити за 8 сати, а кроз другу цев за 12 сати. За колико сати ће се напунити базен ако се истовремено пуни кроз обе цеви?

Решење:

Кроз прву цев базен се напуни за 8 сати тј. за 1 сат напуни се $\frac{1}{8}$ базена. Кроз другу цев базен се напуни за 12 сати тј. за 1 сат напуни се $\frac{1}{12}$ базена. Уколико раде обе цеви за 1 сат напуни се $\frac{1}{8} + \frac{1}{12}$ базена.

Нека је x време за које се напуни цео базен, тада је:

$$\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{12}\right) \cdot x = 1$$

$$\left(\frac{3}{24} + \frac{2}{24}\right) \cdot x = 1$$

$$\frac{5}{24} \cdot x = 1$$

$$x = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5} = 4h\frac{4}{5} \cdot 60 \text{ min} = 4h 48\text{min}$$

Пример 5.

Милош заврши неки посао за 9 дана. Тај исти посао Михајло заврши за 12 дана. Уколико се њима придружи Никола сва тројица ће завршити посао за 4 дана. За колико дана би Никола сам урадио тај посао?

Решење:

Милош заврши посао за 9 дана што значи да за 1 сат уради $\frac{1}{9}$ посла. Михајло заврши посао за 12 дана што значи да за 1 сат уради $\frac{1}{12}$ посла. Никола заврши посао за x дана што значи да за 1 сат уради $\frac{1}{x}$ посла. За 1 дан сва тројица ураде $\frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{x}$ посла.

Сва тројица заврше посао за 4 дана па је:

$$\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{x}\right) \cdot 4 = 1$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{x} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{9}{36} - \frac{4}{36} - \frac{3}{36}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{36}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{18}$$

$$x = 18$$

Пример 6.

Одреди најмањи природан број x за који је $(x - 1)^2 - (x + 1)^2 < -10 - x$.

Решење:

$$(x - 1)^2 - (x + 1)^2 < -10 - x$$

$$(x^2 - 2x + 1) - (x^2 + 2x + 1) < -10 - x$$

$$x^2 - 2x + 1 - x^2 - 2x - 1 < -10 - x$$

$$-4x + x < -10$$

$$-3x < -10 \quad / \cdot (-1)$$

$$3x > 10$$

$$x > \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x = 4$$

Пример 7.

Одреди све x за које је израз $(3x + 1) \cdot (x - 2) - 3 \cdot (x + 1)^2$ позитиван.

Решење:

$$(3x + 1) \cdot (x - 2) - 3 \cdot (x + 1)^2 > 0$$

$$(3x^2 - 6x + x - 2) - 3 \cdot (x^2 + 2x + 1) > 0$$

$$3x^2 - 6x + x - 2 - 3x^2 - 6x - 3 > 0$$

$$-11x > 5 \quad / \cdot (-1)$$

$$11x < -5$$

$$x < -\frac{5}{11}$$

$$x \in \left(-\infty, -\frac{5}{11}\right)$$

Пример 8.

Одреди све x за које разлика израза $\frac{x+5}{8}$ и $\frac{4-x}{2}$ није већа од -2 .

Решење:

$$\frac{x+5}{8} - \frac{4-x}{2} \leq -2 \quad / \cdot 8$$

$$\cancel{8} \cdot \frac{x+5}{\cancel{8}_1} - \cancel{8} \cdot \frac{4-x}{\cancel{2}_1} \leq 8 \cdot (-2)$$

$$1 \cdot (x+5) - 4 \cdot (4-x) \leq -16$$

$$x+5-16+4x \leq -16$$

$$5x \leq -5+16-16$$

$$5x \leq -5$$

$$x \leq -1$$

$$x \in (-\infty, -1]$$

Пример 9.

Милица се сваком од својих десет пријатеља са летовања јавила писмом или разгледницом. Писма је плаћала 10 динара а разгледнице 15. Ако је потрошила 110 динара, колико писама и колико разгледница је послала?

Решење:

Нека је: x број послатих писама и y број послатих разгледница.

Послала је писма и разгледнице на десет пријатеља па је $x + y = 10$.

Једно писмо кошта 10 динара а x писама кошта $10x$ динара. Једна разгледница кошта 15 динара а y разгледница кошта $15y$ динара. Сва писма и све разгледнице је платила 110 динара па је $10x + 15y = 110$.

$$\begin{array}{rcl} x + y = 10 & \Rightarrow & x = 10 - y \\ 10x + 15y = 110 & & \end{array}$$

$$10 \cdot (10 - y) + 15y = 110$$

$$100 - 10y + 15y = 110$$

$$-10y + 15y = 110 - 100$$

$$5y = 10$$

$$y = 2$$

$$x = 8$$

Милица је послала 8 писама и 2 разгледнице.

Пример 10.

Влада је за свој рођендан купио бананице и штанглице. Бананица кошта 25 динара, а штанглица 30 динара. Ако је Влада потрошио 965 динара и купио 35 слаткиша, колико је купио бананица а колико штанглица?

Решење:

Нека је: x број бананица и y број штанглица.

Купио је 35 слаткиша па је $x + y = 35$.

x бананица кошта $25x$ динара а y штанглица кошта $15y$ динара.

Сви слаткиши коштају 965 динара па је $25x + 30y = 965$.

$$\begin{array}{rcl} x + y = 35 & \Rightarrow & x = 35 - y \\ 25x + 30y = 965 & & \end{array}$$

$$25 \cdot (35 - y) + 30y = 965$$

$$875 - 25y + 30y = 965$$

$$-25y + 30y = 965 - 875$$

$$5y = 90$$

$$y = 18$$

$$x = 17$$

Влада је купио 17 бананица и 18 штанглица.

Пример 11.

Један угао троугла је 95° . Одреди друга два угла тог троугла ако је један од њих за 15° мањи од другог.

Решење:

Нека је $\alpha = 95^\circ$.

Један угао је 15° мањи од другог па је $\beta = \gamma - 15^\circ$.

Збир углова у троуглу је 180° па је:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$95^\circ + \gamma - 15^\circ + \gamma = 180^\circ$$

$$\gamma + \gamma = 180^\circ - 95^\circ + 15^\circ$$

$$2\gamma = 100^\circ$$

$$\gamma = 50^\circ$$

$$\beta = 35^\circ$$

Пример 12.

Збир два броја је 176. Одреди те бројеве ако је један од њих за 20% већи од другог.

Решење:

Нека су та два броја x и y .

Збир та два броја је 176 па је $x + y = 176$.

Један од њих је за 20% већи од другог па је:

$$x = y + 20\%y = y + \frac{20}{100}y = y + 0,2y = 1,2y$$

Сада је:

$$x + y = 176$$

$$x = 1,2y$$

$$1,2y + y = 176$$

$$2,2y = 176 \quad / \cdot 10$$

$$22y = 1760$$

$$y = 1760 : 22$$

$$y = 80$$

$$x = 96$$