

Линеарна функција

Функција је пресликавање из скупа A у B скуп, при чему се сваки елемент скупа A пресликава у тачно један елемент из скупа B . Скуп A је **домен** функције или скуп оригинала, а скуп B **кодомен** или скуп слика.

Линеарна функција пресликава скуп реалних бројева у скуп реалних бројева.

Експлицитни облик линеарне функције је

$$y = k \cdot x + n$$

где реалан број k представља коефицијент правца линеарне функције, а реалан број n представља пресек са y – осом.

Имплицитни облик линеарне функције је

$$ax + by + c = 0$$

где су a , b и c реални бројеви.

График линеарне функције је права чије су тачке сви уређени парови (x, y) за које важи да је $y = kx + n$.

Особине линеарне функције:

- домен функције
је скуп оригинала тј. скуп реалних бројева
- нула функције
је вредност независно променљиве x за коју је $y = 0$
- знак функције
значи одређивање интервала независно променљивих x за које је $y > 0$ и интервала за које је $y < 0$, знак функције мења се у односу на нулу функције
- монотоност функције
одређује се на основу коефицијента правца функције
ако је $k > 0$ функција је растућа,
ако је $k < 0$ функција је опадајућа,
ако је $k = 0$ график функције је паралелан са x – осом
- пресек са y –осом
је параметар n из експлицитног облика функције
- кодомен функције
је скуп слика тј. скуп реалних бројева

Пример:

Скицирати график функције $y = 2x + 3$ и испитати особине.

Бирамо вредности за x и рачунамо y како бисмо добили координате тачака које цртамо у координатни систем. Права која пролази кроз те тачке је график функције.

$$x = -2$$

$$y = 2 \cdot (-2) + 3 = -4 + 3 = -1$$

$$x = -1$$

$$y = 2 \cdot (-1) + 3 = -2 + 3 = 1$$

$$x = 0$$

$$y = 2 \cdot 0 + 3 = 0 + 3 = 3$$

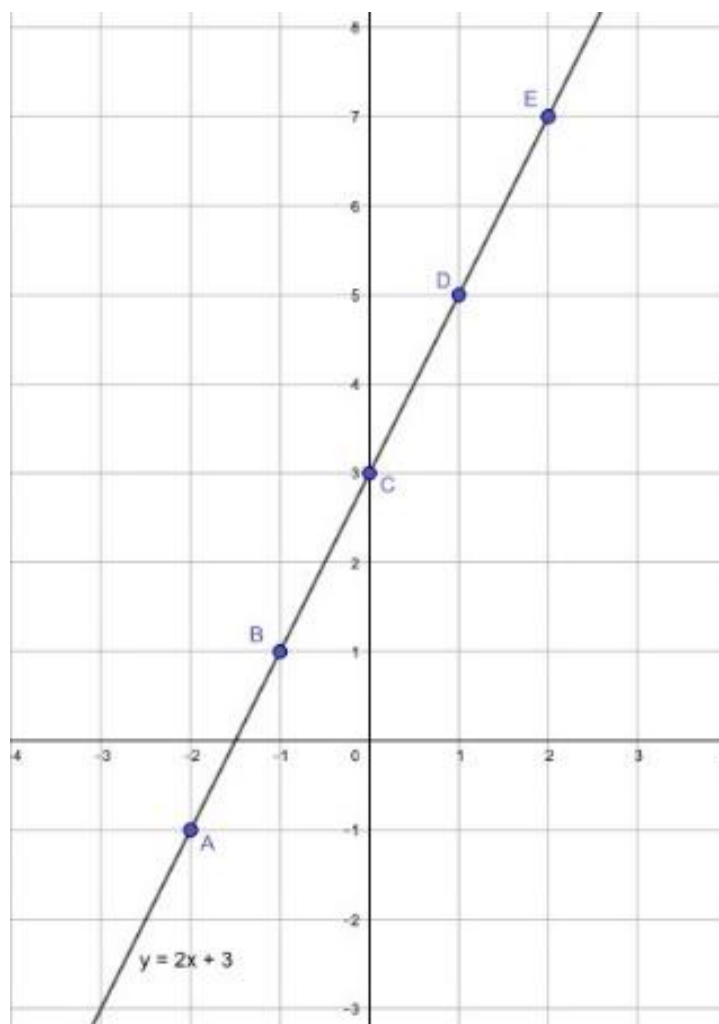
$$x = 1$$

$$y = 2 \cdot 1 + 3 = 2 + 3 = 5$$

$$x = 2$$

$$y = 2 \cdot 2 + 3 = 4 + 3 = 7$$

	A	B	C	D	E
x	-2	-1	0	1	2
y	-1	1	3	5	7



Особине:

- домен функције је \mathbb{R}
- нула функције:

$$y = 0$$

$$2x + 3 = 0$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

- знак функције:

$$y > 0 \text{ за } 2x + 3 > 0 \Rightarrow x > -\frac{3}{2}$$

$$\text{тј. } y > 0 \text{ кад } x \in \left(-\frac{3}{2}, +\infty\right)$$

$$y < 0 \text{ за } 2x + 3 < 0 \Rightarrow x < -\frac{3}{2}$$

$$\text{тј. } y < 0 \text{ кад } x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$$

- монотоност функције:

$$k = 2 \text{ тј. } k > 0$$

функција је растућа

- пресек са y -осом:

$$n = 3$$

- кодомен функције је \mathbb{R}

Пример:

Скицирати график функције $y = -2x + 3$ и испитати особине.

Бирамо вредности за x и рачунамо y како бисмо добили координате тачака које цртамо у координатни систем. Права која пролази кроз те тачке је график функције.

$$x = -2$$

$$y = -2 \cdot (-2) + 3 = 4 + 3 = 7$$

$$x = -1$$

$$y = -2 \cdot (-1) + 3 = 2 + 3 = 5$$

$$x = 0$$

$$y = -2 \cdot 0 + 3 = 0 + 3 = 3$$

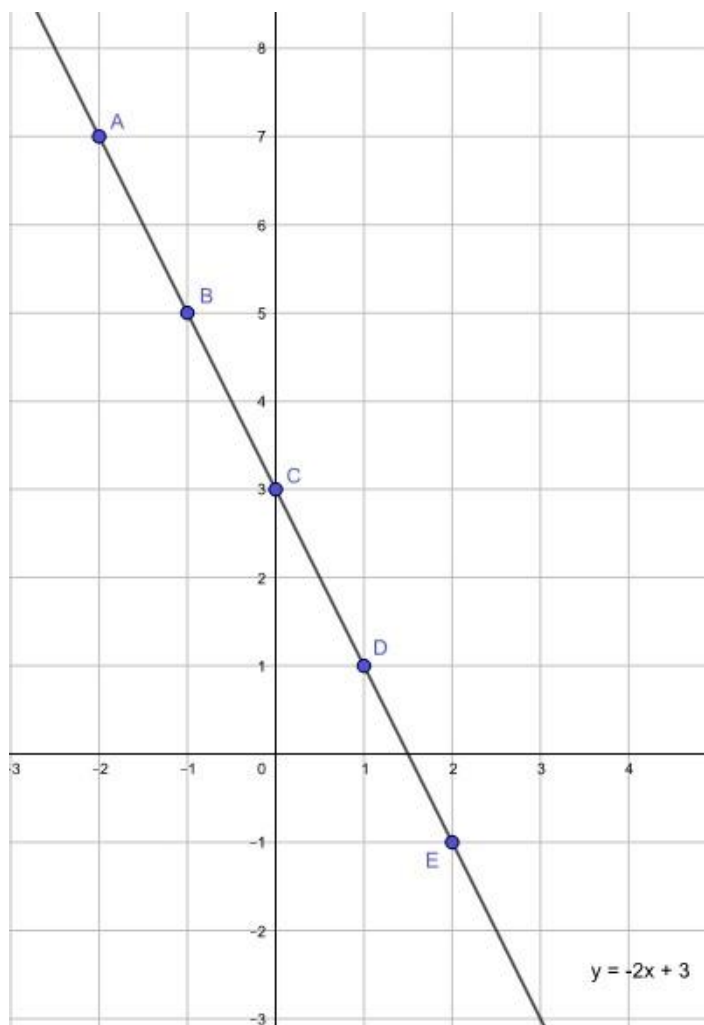
$$x = 1$$

$$y = -2 \cdot 1 + 3 = -2 + 3 = 1$$

$$x = 2$$

$$y = -2 \cdot 2 + 3 = -4 + 3 = -1$$

	A	B	C	D	E
x	-2	-1	0	1	2
y	7	5	3	1	-1



Особине:

- домен функције је \mathbb{R}

- нула функције:

$$y = 0$$

$$-2x + 3 = 0$$

$$x = \frac{3}{2}$$

- знак функције:

$$y > 0 \text{ за } -2x + 3 > 0 \Rightarrow x < \frac{3}{2}$$

$$\text{тј. } y > 0 \text{ кад } x \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$$

$$y < 0 \text{ за } -2x + 3 < 0 \Rightarrow x > \frac{3}{2}$$

$$\text{тј. } y < 0 \text{ кад } x \in \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$$

- монотоност функције:

$$k = -2 \text{ тј. } k < 0$$

функција је опадајућа

- пресек са y -осом:

$$n = 3$$

- кодомен функције је \mathbb{R}

Права $y = 0$ је x – оса.

Права $x = 0$ је y – оса.

Права $y = c, c \in \mathbb{R}$ је права паралелна са x – осом.

Права $x = c, c \in \mathbb{R}$ је паралелна са y – осом.

Графици функција $y = k_1x + n_1$ и $y = k_2x + n_2$ су паралелни ако је $k_1 = k_2$.

Напомена:

За скицирање графика функције довољне су две различите тачке јер сваке две различите тачке одређују тачно једну праву. Дакле, график функције може да се нацрта помоћу нула функције и тачке пресека графика функције са y –осом.

Пример:

$$y = 2x - 3 \text{ и } y = 2x + 5$$

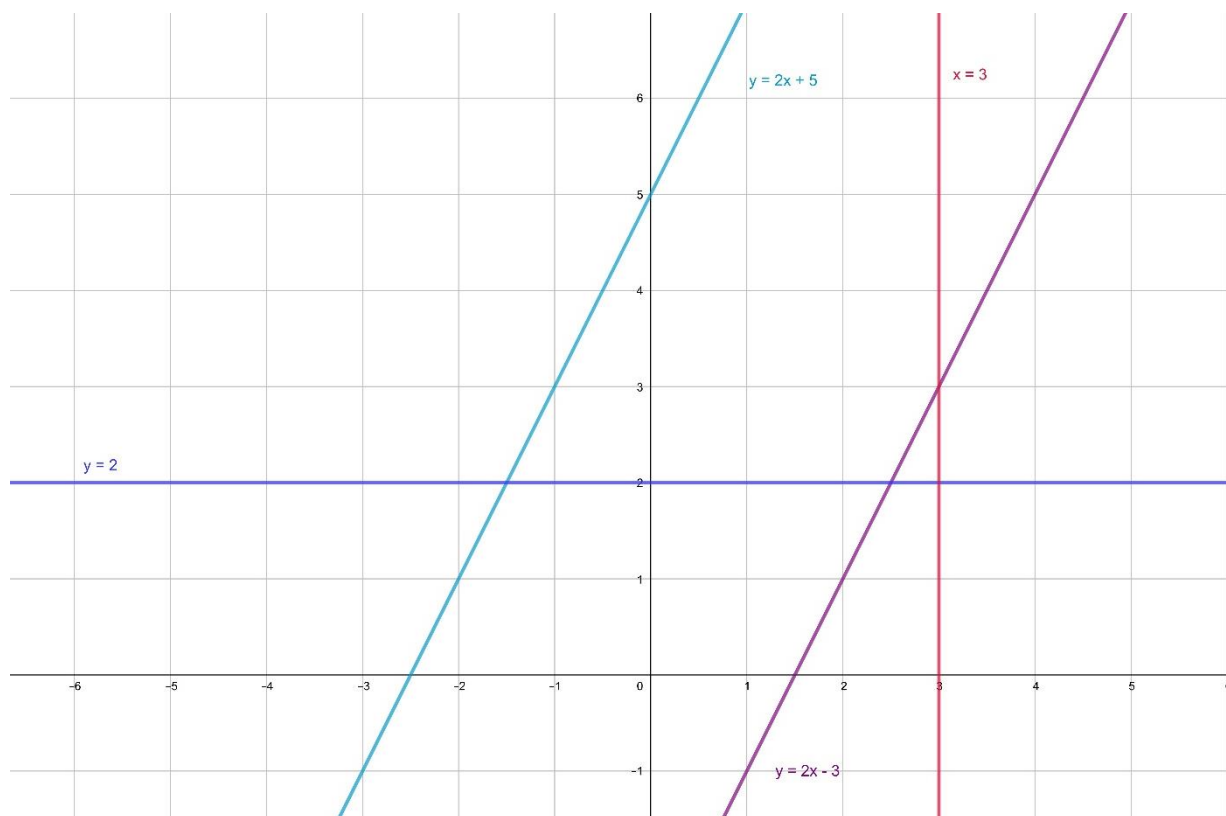
Графици функција су паралелне праве јер функције имају једнак коефицијент правца тј. $k = 2$.

Пример:

$$y = 2 \text{ и } x = 3$$

Права $y = 2$ је паралелна са x – осом.

Права $x = 3$ је паралелна са y – осом.



Пример 1.

Дата је функција $-4x + 2y - 5 = 0$. Одреди координате тачке у којој график функције сече y - осу. Да ли је функција растућа или опадајућа?

Решење:

Дата функција је у имплицитном облику па је морамо пребацити у експлицитни облик како бисмо добили k и n .

$$-4x + 2y - 5 = 0$$

$$2y = 4x + 5 \quad /: 2$$

$$y = \frac{4}{2}x + \frac{5}{2}$$

$$y = 2x + \frac{5}{2}$$

$$k = 2$$

$$n = \frac{5}{2}$$

Пошто је $k = 2$ тј. $k > 0$ функција је растућа.

Пресек са y - осом је тачка са координатама $A(0, n)$ тј. $A\left(0, \frac{5}{2}\right)$.

Тачка $A(x_0, y_0)$ припада графику функције $y = kx + n$ ако њене координате задовољавају дату једначину тј. ако је $y_0 = kx_0 + n$.

Пример 2.

Провери која тачка $A(1, -3)$, $B(2, 1)$, $C(0, -3)$ и $D(-1, 0)$ припадају графику функције $y = 2x - 3$.

Решење:

$A(1, -3)$	$B(2, 1)$	$C(0, -3)$	$D(-1, 0)$
$-3 = 2 \cdot 1 - 3$	$1 = 2 \cdot 2 - 3$	$-3 = 2 \cdot 0 - 3$	$0 = 2 \cdot (-1) - 3$
$-3 = 2 - 3$	$1 = 4 - 3$	$-3 = 0 - 3$	$0 = -2 - 3$
$-3 = -1$	$1 = 1$	$-3 = -3$	$0 = -5$
не припада	припада	припада	не припада

Пример 3.

Одреди координате тачке A која припада графику функције $y = -3x + 1$ ако је њена ордината -2 .

Решење:

Тачка A има координате $A(x, -2)$ и припада графику функције $y = -3x + 1$ па је:

$$-2 = -3x + 1$$

$$3x = 1 + 2$$

$$3x = 3$$

$$x = 1$$

Дакле, тачка A има координате $A(1, -2)$.

Пример 4.

Дата је линеарна функција $3x - y + 6 = 0$.

- 1) Одреди нулу функције.
- 2) Одреди x за које је $y = -3$.

Решење:

$$1) \quad y = 0$$

$$3x - 0 + 6 = 0$$

$$3x + 6 = 0$$

$$3x = -6$$

$$x = -6 : 3$$

$$x = -2$$

$$2) \quad y = -3$$

$$3x - (-3) + 6 = 0$$

$$3x + 3 + 6 = 0$$

$$3x + 9 = 0$$

$$3x = -9$$

$$x = -9 : 3$$

$$x = -3$$

Пример 5.

Одредити линеарну функцију $y = kx + n$ ако тачке $A(0,5)$ и $B(1,3)$ припадају графику функције.

Решење:

Тачке $A(0,5)$ и $B(1,3)$ припадају графику функције $y = kx + n$ па је:

$$A(0,5)$$

$$5 = k \cdot 0 + n$$

$$5 = 0 + n$$

$$n = 5$$

$$B(1,3)$$

$$3 = k \cdot 1 + 5$$

$$3 = k + 5$$

$$k = 5 - 3$$

$$k = 2$$

Дакле, линеарна функција је $y = 2x + 5$.

Пример 6.

Одредити линеарну функцију $y = kx + n$ ако тачке $A(1,2)$ и $B(-1, -4)$ припадају графику функције.

Решење:

Тачке $A(1,2)$ и $B(-1, -4)$ припадају графику функције $y = kx + n$ па је:

$A(1,2)$

$$2 = k \cdot 1 + n$$

$$2 = k + n \quad \Rightarrow \quad n = 2 - k$$

$B(-1, -4)$

$$-4 = k \cdot (-1) + (2 - k)$$

$$-4 = -k + 2 - k$$

$$k + k = 2 + 4$$

$$2k = 6$$

$$k = 6 : 2$$

$$k = 3$$

$$n = 2 - 3$$

$$n = -1$$

Дакле, линеарна функција је $y = 3x - 1$.