

Полиноми, разлика квадрата и квадрат бинома

Рационални алгебарски изрази су изрази који се састоје од бројева и променљивих повезаних неком рачунском операцијом.

Моном је полином који се састоји од броја и/или непознате повезане множењем.

Примери монома: $5, -\frac{7}{3}, -5x, \frac{3}{2}x^2, 4x^3y, 7xy^2z^3, \dots$

Бином је полином који се састоји од два монома повезаних операцијама сабирања и одузимања.

Примери бинома: $3 + 2x, \frac{5}{3} - x^3, 4x^2 - 7x^3y, \frac{3}{2}xy + 5, \dots$

Трином је полином који се састоји од три монома повезаних операцијама сабирања и одузимања.

Примери трином: $2 - 8x^2 - 5y, \frac{5}{2}x^2 - 4x + 7xy^3, \dots$

Слични мономи су мономи који садрже све променљиве истог степена.

Примери сличних монома: $2x^2, \frac{3}{2}x^2, -\frac{4}{7}x^2, \dots$ или $\frac{5}{7}xy^3, -2xy^3, -\frac{9}{5}xy^3, \dots$

Сабирамо и одузимамо само сличне мономе тако што саберемо или одузмемо бројеве док променљива остаје иста.

Пример:

$$7x^2 + 5x^2 = 12x^2$$

$$-3xy^2z + 7xy^2z = 4xy^2z$$

$$0,5xy - 0,7xy = -2xy$$

$$-\frac{4}{7}x^{10}y^3 - \frac{5}{7}x^{10}y^3 = -\frac{9}{7}x^{10}y^3$$

Множимо мономе тако што помножимо бројеве а затим променљиве применом правила за множење степена са истом основом.

Пример:

$$3x^2 \cdot 4xy = 12x^{2+1}y = 12x^3y$$

$$-3xy \cdot 5x^2y^4 = -15x^{1+2}y^{1+4} = -15x^3y^5$$

$$-2x^2y^3 \cdot \frac{3}{2}y^4 = -\frac{6}{2}x^2y^{3+4} = -3x^2y^7$$

$$-\frac{3}{5}x^3yz \cdot \left(-\frac{10}{12}xy^5\right) = \frac{30}{60}x^{3+1}y^{1+5}z = \frac{1}{2}x^4y^6z$$

Делимо мономе тако што поделимо бројеве а затим променљиве применом правила за дељење степена са истом основом.

Пример:

$$12x^2 : 4x^2 = 3x^{3-3} = 3x^0 = 3 \cdot 1 = 3$$

$$15x^5y^4 : (-5xy) = -3x^{5-1}y^{4-1} = -3x^4y^3$$

$$-20x^4y^7 : (-4x^2y^3) = 5x^{4-2}y^{7-3} = 5x^2y^4$$

$$(-x^4y^5z^7) : 2xy^5z^6 = -\frac{1}{2}x^{4-1}y^{5-5}z^{7-6} = -\frac{1}{2}x^3y^0z^1 = -\frac{1}{2}x^3z$$

Општи облик полинома је:

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

где је x променљива, $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}_0$.

Уколико је $a_n \neq 0$ онда је полином $P(x)$ степена n .

Пример:

Полином $5x^3 + 4x^2 - 7$ је трећег степена.

Полином $-2x^7 + x^5 - 2x^4 + 7x^3 - 2x - 1$ је седмог степена.

Сабирање и одузимање полинома

Полиноме сабирамо и одузимамо тако што сабирамо и одузимамо сличне мономе.

Пример 1.

Дати су полиноми $P(x) = 5x^3 + 2x^2 - x + 6$ и $Q(x) = -3x^3 - 7x^2 + 4x - 5$. Одреди њихов збир и разлику.

Решење:

$$P(x) + Q(x) =$$

$$= (5x^3 + 2x^2 - x + 6) + (-3x^3 - 7x^2 + 4x - 5)$$

$$= 5x^3 + 2x^2 - x + 6 - 3x^3 - 7x^2 + 4x - 5$$

$$= 2x^3 - 5x^2 + 3x + 1$$

$$P(x) - Q(x) =$$

$$= (5x^3 + 2x^2 - x + 6) - (-3x^3 - 7x^2 + 4x - 5)$$

$$= 5x^3 + 2x^2 - x + 6 + 3x^3 + 7x^2 - 4x + 5$$

$$= 8x^3 + 9x^2 - 5x + 11$$

Пример 2.

Дати су полиноми $P(x) = -2x^7 + 2x^5 - 4x^3 + 2x^2 + 6$ и $Q(x) = x^3 - 5x^2 - 3x + 1$.
Израчунај њихов збир и разлику.

Решење:

$$P(x) + Q(x) = (-2x^7 + 2x^5 - 4x^3 + 2x^2 + 6) + (x^3 - 5x^2 - 3x + 1)$$

$$= -2x^7 + 2x^5 - 4x^3 + 2x^2 + 6 + x^3 - 5x^2 - 3x + 1$$

$$= -2x^7 + 2x^5 - 3x^3 - 3x^2 - 3x + 7$$

$$P(x) - Q(x) = (-2x^7 + 2x^5 - 4x^3 + 2x^2 + 6) - (x^3 - 5x^2 - 3x + 1)$$

$$= -2x^7 + 2x^5 - 4x^3 + 2x^2 + 6 - x^3 + 5x^2 + 3x - 1$$

$$= -2x^7 + 2x^5 - 5x^3 + 7x^2 + 3x + 5$$

Множење полинома

Полиноме множимо тако што сваки члан првог полинома помножимо са сваким чланом другог полинома.

Пример 3.

Израчунај производ полинома $P(x) = 2x - 3$ и $Q(x) = -3x^2 + 4x - 2$.

Решење:

$$P(x) \cdot Q(x) =$$

$$= (2x - 3) \cdot (-3x^2 + 4x - 2)$$

$$= 2x \cdot (-3x^2) + 2x \cdot 4x + 2x \cdot (-2) - 3 \cdot (-3x^2) - 3 \cdot 4x - 3 \cdot (-2)$$

$$= -6x^3 + 8x^2 - 4x + 9x^2 - 12x + 6$$

$$= -6x^3 + 17x^2 - 16x + 6$$

Пример 4.

Израчунај производ полинома $P(x) = x^2 - 3x + 4$ и $Q(x) = 2x^2 - 3x + 2$.

Решење:

$$P(x) \cdot Q(x) = (x^2 - 3x + 4) \cdot (2x^2 - 3x + 2)$$

$$= x^2 \cdot 2x^2 + x^2 \cdot (-3x) + x^2 \cdot 2 - 3x \cdot 2x^2 - 3x \cdot (-3x) - 3x \cdot 2 + 4 \cdot 2x^2 + 4 \cdot (-3x) + 4 \cdot 2$$

$$= 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 6x^3 + 9x^2 - 6x + 8x^2 - 12x + 8$$

$$= 2x^4 - 9x^3 + 19x^2 - 18x + 8$$

Квадрат бинома

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Пример:

$$(x + 5)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25$$

$$(3 - 2x)^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2x + (2x)^2 = 9 - 12x + 4x^2$$

$$(2x + 3y^3)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y^3 + (3y^3)^2 = 4x^2 + 12xy^3 + 9y^6$$

$$(4x^2y - 5xy^3)^2 = (4x^2y)^2 - 2 \cdot 4x^2y \cdot 5xy^3 + (5xy^3)^2 = 16x^4y^2 - 40x^3y^4 + 25x^2y^6$$

$$(-x - 5y)^2 = (-x)^2 - 2 \cdot (-x) \cdot 5y + (5y)^2 = x^2 + 10y + 25y^2$$

Напомена:

$$(-a - b)^2 = (a + b)^2$$

Разлика квадрата

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Пример:

$$9 - x^2 = 3^2 - x^2 = (3 - x)(3 + x)$$

$$25x^2 - 49y^2 = (5x)^2 - (7y)^2 = (5x - 7y)(5x + 7y)$$

$$(x + y)^2 - 49 = (x + y)^2 - 7^2 = (x + y + 7)(x + y - 7)$$

$$\begin{aligned} (2x - 3y)^2 - (x + 4y)^2 &= ((2x - 3y) + (x + 4y))((2x - 3y) - (x + 4y)) \\ &= (2x - 3y + x + 4y)(2x - 3y - x - 4y) = (3x + y)(x - 7y) \end{aligned}$$

Пример 5.

Упростити израз: $(3x - 2x^2) \cdot (4 - x) - (4 + 2x) \cdot (x^2 - 1)$

Решење:

$$\begin{aligned} &(3x - 2x^2) \cdot (4 - x) - (4 + 2x) \cdot (x^2 - 1) = \\ &= (3x \cdot 4 + 3x \cdot (-x) - 2x^2 \cdot 4 - 2x^2 \cdot (-x)) - (4 \cdot x^2 + 4 \cdot (-1) + 2x \cdot x^2 + 2x \cdot (-1)) \\ &= (12x - 3x^2 - 8x^2 + 2x^3) - (4x^2 - 4 + 2x^3 - 2x) \\ &= 12x - 3x^2 - 8x^2 + \cancel{2x^3} - 4x^2 + 4 - \cancel{2x^3} + 2x \\ &= -15x^2 + 14x + 4 \end{aligned}$$

Пример 6.

Дати су биноми $A = 2x - 1$, $B = x - 2$ и $C = 2x + 1$. Израчунај $A \cdot C - B^2$.

Решење:

$$\begin{aligned}
 A \cdot C - B^2 &= \\
 &= (2x - 1) \cdot (2x + 1) - (x - 2)^2 \\
 &= ((2x)^2 - 1^2) - (x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2) \\
 &= (4x^2 - 1) - (x^2 - 4x + 4) \\
 &= 4x^2 - 1 - x^2 + 4x - 4 \\
 &= 3x^2 + 4x - 5
 \end{aligned}$$

Пример 7.

Од полинома $4x^2 - 6x + 3$ одузети квадрат бинома $-2x - 3$ и упростити израз.

Решење:

$$\begin{aligned}
 (4x^2 - 6x + 3) - (-2x - 3)^2 &= \\
 &= (4x^2 - 6x + 3) - (2x + 3)^2 \\
 &= (4x^2 - 6x + 3) - ((2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2) \\
 &= 4x^2 - 6x + 3 - (4x^2 + 12x + 9) \\
 &= \cancel{4x^2} - 6x + 3 - \cancel{4x^2} - 12x - 9 \\
 &= -18x - 6
 \end{aligned}$$

Пример 8

Одредити разлику квадрата збира и квадрата разлике монома $2x$ и $2y$ и средити добијени израз.

Решење:

$$\begin{aligned}
 (2x + 2y)^2 - (2x - 2y)^2 &= \\
 &= ((2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 2y + (2y)^2) - ((2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 2y + (2y)^2) \\
 &= (4x^2 + 8xy + 4y^2) - (4x^2 - 8xy + 4y^2) \\
 &= \cancel{4x^2} + 8xy + \cancel{4y^2} - \cancel{4x^2} + 8xy - \cancel{4y^2} \\
 &= 16xy
 \end{aligned}$$