Степеновање и кореновање

Степеновање

Производ n чинилаца при чему су сви једнаки броју $a, a \neq 0$ је n – ти степен броја a, у ознаци a^n, тј.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ пута}}$$

a је **основа** степена a^n, а n је **изложилац** степена a^n.

Особине степена $a \neq 0, b \neq 0, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$:

- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- $a^n : a^m = a^{n-m}$
- $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- $a^1 = a$
- $a^0 = 1$
- $1^n = 1$

Пример:

$5^3 \cdot 5^4 = 5^{3+4} = 3^7$

$2^7 : 2^3 = 2^{7-3} = 2^4$

$(7^3)^5 = 7^{3 \cdot 5} = 7^{15}$

$6^5 = (2 \cdot 3)^5 = 2^5 \cdot 3^5$

$$\left(\frac{3}{8}\right)^5 = \frac{3^5}{8^5}$$

Степеновање негативних целих бројева

$$(-a)^{2n} = a^{2n}$$

$$(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$$

Пример:

$(-5)^8 = 5^8$

$(-5)^7 = -5^7$

Пример 1.

Израчунати вредност израза:

1) $$11 \cdot 3^2 - \frac{9^2}{3}$$

2) $$(3 \cdot 2)^2 - \frac{1}{2} \cdot 4^2$$

3) $$(2^3 \cdot 3^2) : 6 + (2^3 - 3^2) \cdot 10^2$$

4) $$\frac{5}{3^2} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4^2}{9}$$

Решење:

1) $$11 \cdot 3^2 - \frac{9^2}{3} = 11 \cdot 9 - \frac{81}{3} = 99 - 27 = 72$$

2) $$(3 \cdot 2)^2 - \frac{1}{2} \cdot 4^2 = 6^2 - \frac{1}{2} \cdot 16 = 36 - 8 = 28$$

3) $$(2^3 \cdot 3^2) : 6 + (2^3 - 3^2) \cdot 10^2 =$$
$$= (8 \cdot 9) : 6 + (8 - 9) \cdot 100$$
$$= 72 : 6 + (-1) \cdot 100$$
$$= 12 - 100$$
$$= -88$$

4) $$\frac{5}{3^2} + \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \frac{4^2}{9} = \frac{5}{9} + \frac{8}{27} - \frac{16}{9} = \frac{15}{27} - \frac{8}{27} - \frac{48}{27} = -\frac{25}{27}$$

Пример 2.

Израчунати вредност израза:

1) $$\frac{(3^7 : 3^5) \cdot 3^3}{3^6 : 3^2}$$

2) $$\frac{2^5 \cdot 4^3}{8^2 \cdot 2}$$

3) $$\frac{3^3 \cdot 9^2}{81^2 : 27}$$

Решење:

1) $$\frac{(3^7 : 3^5) \cdot 3^3}{3^6 : 3^2} = \frac{3^{7-5} \cdot 3^3}{3^{6-2}} = \frac{3^2 \cdot 3^3}{3^4} = \frac{3^{2+3}}{3^4} = \frac{3^5}{3^4} = 3^{5-4} = 3^1 = 3$$

2) $$\frac{2^5 \cdot 4^3}{8^2 \cdot 2} = \frac{2^5 \cdot (2^2)^3}{(2^3)^2 \cdot 2} = \frac{2^5 \cdot 2^{2 \cdot 3}}{2^{3 \cdot 2} \cdot 2} = \frac{2^5 \cdot \cancelto{1}{2^6}}{\underset{1}{\cancel{2^6}} \cdot 2^1} = \frac{2^5}{2^1} = 2^{5-1} = 2^4 = 16$$

3) $$\frac{3^3 \cdot 9^2}{81^2 : 27} = \frac{3^3 \cdot (3^2)^2}{(3^4)^2 : 3^3} = \frac{3^3 \cdot 3^{2 \cdot 2}}{3^{4 \cdot 2} : 3^3} = \frac{3^3 \cdot 3^4}{3^8 : 3^3} = \frac{3^{3+4}}{3^{8-3}} = \frac{3^7}{3^5} = 3^{7-5} = 3^2 = 9$$

Пример 3.

Израчунати вредност израза:

$$2^5 \cdot \frac{4^3 \cdot 8}{4^2 \cdot 2^6} - 2^3 \cdot \frac{16^2 \cdot 4^2}{2^3 \cdot 8^3}$$

Решење:

$$2^5 \cdot \frac{4^3 \cdot 8}{4^2 \cdot 2^6} - 2^3 \cdot \frac{16^2 \cdot 4^2}{2^3 \cdot 8^3}$$

$$= 2^5 \cdot \frac{(2^2)^3 \cdot 2^3}{(2^2)^2 \cdot 2^6} - 2^3 \cdot \frac{(2^4)^2 \cdot (2^2)^2}{2^3 \cdot (2^3)^3}$$

$$= 2^5 \cdot \frac{2^{2\cdot 3} \cdot 2^3}{2^{2\cdot 2} \cdot 2^6} - 2^3 \cdot \frac{2^{4\cdot 2} \cdot 2^{2\cdot 2}}{2^3 \cdot 2^{3\cdot 3}}$$

$$= \frac{2^5}{1} \cdot \frac{\cancel{2^6} \cdot 2^3}{2^4 \cdot \cancel{2^6}} - \frac{\cancel{2^3}}{1} \cdot \frac{2^8 \cdot 2^4}{\cancel{2^3} \cdot 2^9}$$

$$= \frac{2^5 \cdot 2^3}{2^4} - \frac{2^8 \cdot 2^4}{2^9} = \frac{2^{5+3}}{2^4} - \frac{2^{8+4}}{2^9} = \frac{2^8}{2^4} - \frac{2^{12}}{2^9} = 2^{8-4} - 2^{12-9} = 2^4 - 2^3 = 16 - 8 = 8$$

Пример 4.

Упростити израз:

$$\frac{(x^4)^3 \cdot x^3 : x^5}{(x^5 : x^2)^3}$$

Решење:

$$\frac{(x^4)^3 \cdot x^3 : x^5}{(x^5 : x^2)^3} = \frac{x^{12} \cdot x^3 : x^5}{(x^3)^3} = \frac{x^{15} : x^5}{x^9} = \frac{x^{10}}{x^9} = x^1 = x$$

Пример 6.

Израчунати вредност израза:

$$\frac{3^7 + 3^5}{3^7 - 3^5}$$

Решење:

$$\frac{3^7 + 3^5}{3^7 - 3^5} = \frac{3^5 \cdot 3^2 + 3^5}{3^5 \cdot 3^2 - 3^5} = \frac{3^5 \cdot (3^2 + 1)}{3^5 \cdot (3^2 - 1)} = \frac{9 + 1}{9 - 1} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

Кореновање

Квадратни корен или корен броја a, у ознаци $\sqrt[2]{a}$ или $\sqrt{a}$, је ненегативан број c који када се квадрира даје број a тј.

$$\sqrt{a} = c \iff c^2 = a$$

a је **поткорена** величина.

Напомена:

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Особине корена:

- $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Напомена:

- $\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
- $\sqrt{a - b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$

Пример:

$$\sqrt{25 \cdot 16} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{16} = 5 \cdot 4 = 20$$

$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5 \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

$$\sqrt{6} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{6 \cdot 7} = \sqrt{42}$$

$$\sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{24}{3}} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$$

$$\sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$$

$$\sqrt{52 - 4} = \sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 4 \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

Пример 7.

Израчунати вредност израза:

1) $\sqrt{1-\frac{9}{25}}+\sqrt{1+\frac{39}{25}}$
2) $2\sqrt{2}+\sqrt{72}-3\sqrt{8}$
3) $-3\sqrt{(-2)^2}+\left(2\sqrt{3}\right)^2-\left(4\sqrt{5}\right)^2$

Решење:

1)
$$\sqrt{1-\frac{9}{25}}+\sqrt{1+\frac{39}{25}}=\sqrt{\frac{25}{25}-\frac{9}{25}}+\sqrt{\frac{25}{25}+\frac{39}{25}}=\sqrt{\frac{16}{25}}+\sqrt{\frac{64}{25}}=\frac{4}{5}+\frac{8}{5}=\frac{12}{5}=2\,\frac{2}{5}$$
2)
$$2\sqrt{2}+\sqrt{72}-3\sqrt{8}=$$
$$=2\sqrt{2}+\sqrt{36\cdot 2}-3\sqrt{4\cdot 2}=2\sqrt{2}+6\sqrt{2}-3\cdot 2\sqrt{2}=8\sqrt{2}-6\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$
3)
$$-3\sqrt{(-2)^2}+\left(2\sqrt{3}\right)^2-\left(4\sqrt{5}\right)^2=$$
$$=-3\sqrt{4}+4\cdot 3-16\cdot 5=-3\cdot 2+12-80=-6+12-80=-74$$

Рационализација

Рационализација је поступак ослобађања од корена у имениоцу разломка.

Пример:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{12}{\sqrt{3}}=\frac{12}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{12\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{\overset{4}{\cancel{12}}\sqrt{3}}{\underset{1}{\cancel{3}}}=4\sqrt{3}$$