

Системи линеарних једначина

Систем две линеарне једначине са две непозне је општег облика

$$\begin{aligned}a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2\end{aligned}$$

где су x и y непознате, а $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ реални бројеви.

Решење система линеарних једначина је уређени пар (x_0, y_0) за који важи да је

$$\begin{aligned}a_1x_0 + b_1y_0 &= c_1 \\ a_2x_0 + b_2y_0 &= c_2\end{aligned}$$

Метода замене

Метода замене подразумева да из једне једначине изрази једна непозната и замени у другу. На тај начин друга једначина система постаје линеарна једначина са једном непознатом. Решење друге једначине уврсти се у прву како би се израчунала и друга непозната. На тај начин добија се уређени пар који је решење система.

Пример 1.

Решити систем:

$$\begin{aligned}x + 3y &= -1 \\ 2x - 5y &= 9\end{aligned}$$

Решење:

$$\begin{array}{rcl}x + 3y = -1 & \Rightarrow & x = -1 - 3y \\ 2x - 5y = 9 & & \end{array}$$

$$\begin{aligned}2 \cdot (-1 - 3y) - 5y &= 9 \\ -2 - 6y - 5y &= 9 \\ -6y - 5y &= 9 + 2 \\ -11y &= 11 \\ y &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= -1 - 3 \cdot (-1) \\ x &= -1 + 3 \\ x &= 2\end{aligned}$$

$$(x, y) = (2, -1)$$

Пример 2.

Решити систем:

$$\begin{aligned}-3x + y &= 5 \\ 5x - 2y &= -9\end{aligned}$$

Решење:

$$\begin{array}{rcl}-3x + y = 5 & \Rightarrow & y = 5 + 3x \\ 5x - 2y = -9 & & \end{array}$$

$$\begin{aligned}5x - 2 \cdot (5 + 3x) &= -9 \\ 5x - 10 - 6x &= -9 \\ 5x - 6x &= -9 + 10 \\ -x &= 1 \\ x &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y &= 5 + 3 \cdot (-1) \\ y &= 5 - 3 \\ y &= 2\end{aligned}$$

$$(x, y) = (-1, 2)$$

Метода супротних коефицијената

Метода супротних коефицијената или Гаусова метода подразумева да се једна или обе једначине помноже како би се уз исту непознату добили супритни кеофицијенти који кад се саберу дају нулу. На тај начин добијамо једначину која садржи само једну непознату. Решење добијене једначине уврсти се у било коју једначину почетног система и добија се решење за другу непознату. На тај начин добија се уређени пар који је решење система.

Пример 3.

Решити систем:

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= -1 \\ 2x - 3y &= 12 \end{aligned}$$

Решење:

$$\begin{array}{r} 3x + 5y = -1 \\ 2x - 3y = 12 \end{array} \quad \begin{array}{l} / \cdot (-2) \\ / \cdot 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -6x - 10y = 2 \\ 6x - 9y = 36 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{r} -6x - 10y = 2 \\ 6x - 9y = 36 \end{array}} \right\} +$$

$$\begin{array}{r} -19y = 38 \\ y = -2 \end{array}$$

$$3x + 5 \cdot (-2) = -1$$

$$3x - 10 = -1$$

$$3x = -1 + 10$$

$$3x = 9$$

$$x = 3$$

$$(x, y) = (3, -2)$$

Пример 4.

Решити систем:

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= -5 \\ -5x + y &= 13 \end{aligned}$$

Решење:

$$\begin{array}{r} 3x - 2y = -5 \\ -5x + y = 13 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ / \cdot 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3x - 2y = -5 \\ -10x + 2y = 26 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{r} 3x - 2y = -5 \\ -10x + 2y = 26 \end{array}} \right\} +$$

$$\begin{array}{r} -7x = 21 \\ x = -3 \end{array}$$

$$-5 \cdot (-3) + y = 13$$

$$15 + y = 13$$

$$y = 13 - 15$$

$$y = -2$$

$$(x, y) = (-3, -2)$$

Систем линеарних једначина је:

- **одређен** уколико има један уређени пар за решење;
- **неодређен** ако има бесконачно много решења;
- **немогућ** или контрадикторан ако нема решења.

Пример 5.

Решити систем:

$$\begin{aligned} 3x + y &= 4 \\ -3x - y &= -4 \end{aligned}$$

Решење:

$$\begin{array}{r} 3x + y = 4 \\ -3x - y = -4 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 3x + y = 4 \\ -3x - y = -4 \end{array}} \right\} +$$

$0 = 0$ неодређен систем

$$y = 4 - 3x$$

$$(x, y) = (x, 4 - 3x), x \in \mathbb{R}$$

Пример 6.

Решити систем:

$$\begin{aligned} -2x + 5y &= 4 \\ -2x + 5y &= 3 \end{aligned}$$

Решење:

$$\begin{array}{r} -2x + 5y = 4 \\ -2x + 5y = 3 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} -2x + 5y = 4 \\ -2x + 5y = 3 \end{array}} \right\} -$$

$0 = 1$ немогућ систем

$$(x, y) = \emptyset$$

Пример 7.

Решити систем:

$$\frac{5x-1}{6} + \frac{3y-1}{10} = 3$$

$$\frac{11-x}{6} + \frac{11+y}{4} = 3$$

Решење:

$$\frac{5x-1}{6} + \frac{3y-1}{10} = 3 \quad / \cdot 30$$

$$\frac{11-x}{6} + \frac{11+y}{4} = 3 \quad / \cdot 12$$

$$\frac{5}{30} \cdot \frac{5x-1}{6} + \frac{3}{30} \cdot \frac{3y-1}{10} = 30 \cdot 3$$

$$\frac{2}{12} \cdot \frac{11-x}{6} + \frac{3}{12} \cdot \frac{11+y}{4} = 12 \cdot 3$$

$$5 \cdot (5x-1) + 3 \cdot (3y-1) = 90$$

$$2 \cdot (11-x) + 3 \cdot (11+y) = 36$$

$$25x - 5 + 9y - 3 = 90$$

$$22 - 2x + 33 + 3y = 36$$

$$25x + 9y = 90 + 5 + 3$$

$$-2x + 3y = 36 - 22 - 33$$

$$25x + 9y = 98$$

$$-2x + 3y = -19 \quad / \cdot (-3)$$

$$\left. \begin{array}{l} 25x + 9y = 98 \\ 6x - 9y = 57 \end{array} \right\} +$$

$$31x = 155$$

$$x = 155 : 31$$

$$x = 5$$

$$-2 \cdot 5 + 3y = -19$$

$$-10 + 3y = -19$$

$$3y = 10 - 19$$

$$3y = -9$$

$$y = -3$$

$$(x, y) = (5, -3)$$