Линеарне неједначине

Линеарна неједначина са једном непознатом x је свака неједначина облика

$$a \cdot x > b$$
$$a \cdot x < b$$
$$a \cdot x \geq b$$
$$a \cdot x \leq b$$

при чему су a и b су реални бројеви.

Решење неједначине је сваки број који када се замени у неједначину уместо непознате даје даје тачану неједнакост.

Пример 1.

Решити неједначину $2x < 6$.

Решење:

$2x < 6$
$x < 6:2$
$x < 3$

У скупу природних бројева решења неједначине су $\{1,2\}$.
У проширеном скупу природних бројева решење неједначине је $\{0,1,2\}$.
У скупу целих бројева решење неједначине је $\{2,1,0,-1,-2,\dots\}$.
У скупу реалних бројева решење неједначине је $(-\infty,3)$.

Пример 2.

Решити неједначину $2x \leq 6$.

Решњење:

$2x \leq 6$
$x \leq 6:2$
$x \leq 3$

У скупу природних бројева решења неједначине су $\{1,2,3\}$.
У проширеном скупу природних бројева решење неједначине је $\{0,1,2,3\}$.
У скупу целих бројева решење неједначине је $\{3,2,1,0,-1,-2,\dots\}$.
У скупу реалних бројева решење неједначине је $(-\infty,3]$.

Уколико је неједнакост $>$ или $>$ на бројевној правој иде празан кружић и за записивљње скупа решења користе се обичне заграде.

Уколико је неједнакост $\geq$ или $\leq$ на бројевној правој иде пун кружић и за записивање скупа решења користи се угласта заграда.

За $+\infty$ и $-\infty$ пишу се обчне заграде.

Множењем и дељењем неједначине негативним бројем **мења** се смер неједнакости.

Пример 3.

Решити неједначину $5 - 2x \geq 9$.

Решење:

$5 - 2x \geq 9$

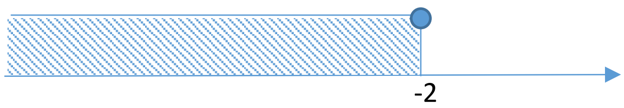
$-2x \geq 9 - 5$

$-2x \geq 4 \qquad /:(-2)$

$x \leq 4:(-2)$

$x \leq -2$

$x \in (-\infty, -2]$



Решавање неједначина:

- ослободимо се разломака ако их има тако што целу једначину множимо са НЗС за све имениоце;
- ослобађамо се заграде множећи сваки са сваким;
- пребацујемо непознате на једну страну неједнакости а познате на другу при чему водимо рачуна да се мења предзнак броја кад мења страну;
- ако множимо или делимо неједначину са негативним бројем мења се смер неједнакости;
- средимо обе стране да добијемо општи облик неједначине коју решимо.

Пример 4.

Решити неједначину:

$$\frac{2x+1}{3} - \frac{3x-2}{2} \geq -1$$

Решење:

$$\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & \end{array}$$

$$\text{НЗС}(3,2) = 3 \cdot 2 = 6$$

$$\frac{2x+1}{3} - \frac{3x-2}{2} \geq -1 \qquad /\cdot 6$$

$$\overset{2}{\cancel{6}} \cdot \frac{2x+1}{\cancel{3}_1} - \overset{3}{\cancel{6}} \cdot \frac{3x-2}{\cancel{2}_1} \geq 6 \cdot (-1)$$

$$2 \cdot (2x+1) - 3 \cdot (3x-2) \geq -6$$

$$4x + 2 - 9x + 6 \geq -6$$

$$4x - 9x \geq -2 - 6 - 6$$

$$-5x \geq -14 \qquad /\cdot (-1)$$

$$5x \leq 14$$

$$x \leq \frac{14}{5}$$

$$x \leq 2\frac{4}{5}$$

$$x \in \left(-\infty, 2\frac{4}{5}\right]$$

Пример 5.

Решити неједначину:

$$3-\frac{3x}{2}<\frac{5}{8}-\frac{4x-3}{6}$$

Решење:

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

$$\text{НЗС}(2,8,6)=2\cdot 2\cdot 2\cdot 3=24$$

$$3-\frac{3x}{2}<\frac{5}{8}-\frac{4x-3}{6} \qquad /\cdot 24$$

$$24\cdot 3-\overset{12}{\cancel{24}}\cdot\frac{3x}{\cancel{2}_1}<24\cdot\frac{5}{8}-\overset{4}{\cancel{24}}\cdot\frac{4x-3}{\cancel{6}_1}$$

$$24\cdot 3-12\cdot 3x<3\cdot 5-4\cdot(4x-3)$$

$$72-36x<15-16x+12$$

$$-36x+16x<-72+15+12$$

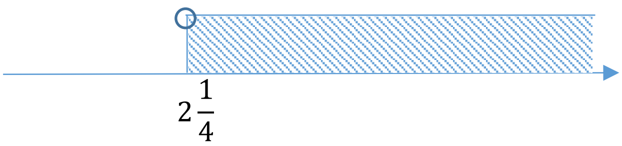
$$-20x<-45 \qquad /\cdot(-1)$$

$$20x>45$$

$$x>\frac{45}{20}$$

$$x>\frac{9}{4}$$

$$x>2\frac{1}{4}$$



$$x\in\left(2\frac{1}{4},+\infty\right)$$

Пример 6.

Реши неједначину:

$$1+\frac{x-6}{3}-\frac{x}{2}\leq 3+\frac{3+x}{4}$$

Решење:

3	2	4	2
3	1	2	2
3	1	1	3
1	1	1	

$НЗС(3,2,4)=2\cdot 2\cdot 3=12$

$$1+\frac{x-6}{3}-\frac{x}{2}\leq 3+\frac{3+x}{4}\qquad /\cdot 12$$

$$12\cdot 1+\overset{4}{\cancel{12}}\cdot\frac{x-6}{\cancel{3}_1}-12\cdot\frac{x}{2}\leq 12\cdot 3+\overset{3}{\cancel{12}}\cdot\frac{3+x}{\cancel{4}_1}$$

$$12+4\cdot(x-6)-6\cdot x\leq 36+3\cdot(3+x)$$

$$12+4x-24-6x\leq 36+9+3x$$

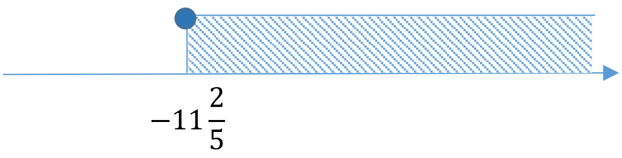
$$4x-6x-3x\leq -12+24+36+9$$

$$-5x\leq 57\qquad /\cdot(-1)$$

$$5x\geq -57$$

$$x\geq -\frac{57}{5}$$

$$x\geq -11\frac{2}{5}$$



$$x\in\left[-11\frac{2}{5},+\infty\right)$$

Пример 7.

Реши неједначину:

$$\frac{x}{6}-\frac{1-x}{4}>\frac{1+x}{3}+\frac{x-2}{24}$$

Решење:

6	4	3	24	2
3	2	3	12	2
3	1	3	6	2
3	1	3	3	3
1	1	1	1	

НЗС$(6,4,3,24)=2\cdot 2\cdot 2\cdot 3=24$

$$\frac{x}{6}-\frac{1-x}{4}>\frac{1+x}{3}+\frac{x-2}{24} \qquad /\cdot 24$$

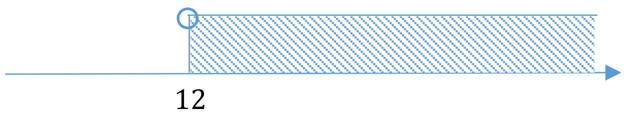
$$\overset{4}{\cancel{24}}\cdot\frac{x}{\cancel{6}_1}-\overset{6}{\cancel{24}}\cdot\frac{1-x}{\cancel{4}_1}>\overset{8}{\cancel{24}}\cdot\frac{1+x}{\cancel{3}_1}+\overset{1}{\cancel{24}}\cdot\frac{x-2}{\cancel{24}_1}$$

$$4\cdot x-6\cdot(1-x)>8\cdot(1+x)+1\cdot(x-2)$$

$$4x-6+6x>8+8x+x-2$$

$$4x+6x-8x-x>6+8-2$$

$$x>12$$



$x\in(12,+\infty)$

Неједначина облика
$$A\cdot B>0 \Leftrightarrow (A>0\ \wedge B>0)\ \vee (A<0\ \wedge B<0)$$
$$A\cdot B<0 \Leftrightarrow (A>0\ \wedge B<0)\ \vee (A<0\ \wedge B>0)$$
$$A\cdot B\geq 0 \Leftrightarrow (A\geq 0\ \wedge B\geq 0)\ \vee (A\leq 0\ \wedge B\leq 0)$$
$$A\cdot B\leq 0 \Leftrightarrow (A\geq 0\ \wedge B\leq 0)\ \vee (A\leq 0\ \wedge B\leq 0)$$

Неједначина облика
$$\frac{A}{B}>0 \Leftrightarrow (A>0\ \wedge B>0)\ \vee (A<0\ \wedge B<0)$$
$$\frac{A}{B}<0 \Leftrightarrow (A>0\ \wedge B<0)\ \vee (A<0\ \wedge B>0)$$
$$\frac{A}{B}\geq 0 \Leftrightarrow (A\geq 0\ \wedge B>0)\ \vee (A\leq 0\ \wedge B<0)$$
$$\frac{A}{B}\geq 0 \Leftrightarrow (A\geq 0\ \wedge B<0)\ \vee (A\leq 0\ \wedge B>0)$$

Дакле,

производ или количник два броја је позитиван ако су оба чиниоца позитивна или оба негативна (делилац мора да буде различит од нуле);

производ или количник два броја је негативан ако су чиниоци различитог знака тј. ако је један позитиван други мора да буде негативан и обрнуто (делилац мора да буде различит од нуле).

Пример 8.

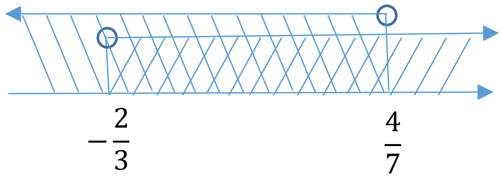
Решити једначину:

$(3x+2)\cdot(4-7x)>0$

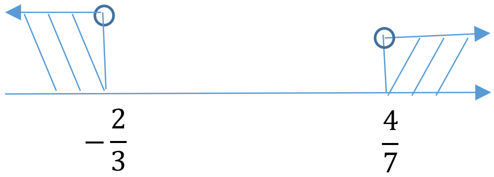
Решење:

$(3x+2)\cdot(4-7x)>0$

$$\left(\begin{array}{ccc} 3x+2>0 & & 4-7x>0 \\ 3x>-2 & \wedge & -7x>-4 \\ & & 7x<4 \\ x>-\frac{2}{3} & & x<\frac{4}{7} \end{array}\right) \vee \left(\begin{array}{ccc} 3x+2<0 & & 4-7x<0 \\ 3x<-2 & \wedge & -7x<-4 \\ & & 7x>4 \\ x<-\frac{2}{3} & & x>\frac{4}{7} \end{array}\right)$$



$x\in\left(-\frac{2}{3},\frac{4}{7}\right)$



$x\in\emptyset$

$x\in\left(-\frac{2}{3},\frac{4}{7}\right)\cup\emptyset=\left(-\frac{2}{3},\frac{4}{7}\right)$

Пример 9.

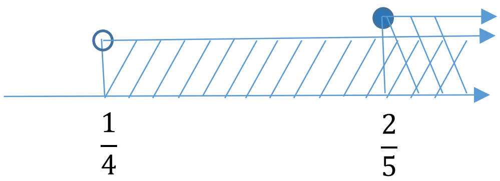
Решити једначине:

$$\frac{5x-2}{1-4x}\le 0$$

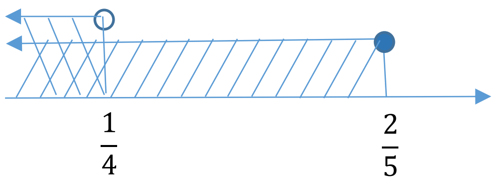
Решење:

$$\frac{5x-2}{1-4x}\le 0$$

$$\left(\begin{array}{c} 5x-2\ge 0\\ 5x\ge 2\\ x\ge\frac{2}{5}\end{array}\quad\land\quad\begin{array}{c}1-4x<0\\ -4x<-1\\ 4x>1\\ x>\frac{1}{4}\end{array}\right)\quad\lor\quad\left(\begin{array}{c} 5x-2\le 0\\ 5x\le 2\\ x\le\frac{2}{5}\end{array}\quad\land\quad\begin{array}{c}1-4x>0\\ -4x>-1\\ 4x<1\\ x<\frac{1}{4}\end{array}\right)$$



$$x\in\left[\frac{2}{5},+\infty\right)$$



$$x\in\left(-\infty,\frac{1}{4}\right)$$

$$x\in\left(-\infty,\frac{1}{4}\right)\cup\left[\frac{2}{5},+\infty\right)$$